ANALISIS DE PORTAFOLIOS CON LAS 20 PRINCIPALES ACCIONES DEL S&P500 CON LA METODOLOGIA BLACK-LITTERMAN

ANDRES FELIPE PERTUZ OROZCO

PROYECTO INTEGRAL DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE

PROFESIONAL EN ESTADÍSTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES

ASESOR

STIVEN LEONARDO SILVA CASTILLO

MAGISTER EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS

PROGRAMA DE ESTADÍSTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES

BOGOTÁ D.C.

2025

NOTA DE ACEPTACIÓN

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Firma del Presidente del Jurado

_____

Firma del Jurado

_____

Firma del Jurado

Bogotá D.C, Febrero del 2025

DIRECTIVAS DE LA UNIVERSIDAD

Presidente de la Universidad y Director del Claustro

Dr. Mario Posada García Peña

Consejero Institucional

Dr. Luis Jaime Posada García Peña

Vicerrectora Académica

Dra. María Fernanda Vega de Mendoza

Vicerrectora de Investigaciones y Extensión

Dra. Susan Margarita Benavides

Vicerrector Administrativo y Financiero

Dr. Ramiro Augusto Forero Corzo

Secretario General

Dr. José Luis Macías Rodríguez

Decano General de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas

Dra. Magaly Faride Herrera Giraldo

Las directivas de la Universidad de América, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documento. Estos corresponden únicamente al autor.

TABLA DE CONTENIDO

pág.

RESUMEN 9

INTRODUCCIÓN 10

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 11

OBJETIVOS 12

ANTECEDENTES 13

1. MARCO CONCEPTUAL 14

1.1. Definiciones y Teoría Básica 14

1.1.1. *Variable Aleatoria* 14

1.1.2. *Función De Distribución Acumulada (FDA)* 14

1.1.3. *Valor Esperado* 15

1.1.4. *Distribuciones* 16

1.1.5. *Estadistica Inferencial* 23

1.1.6. *Pruebas de Bondad de Ajuste* 36

1.1.7. *Teoría de los Mercados Eficientes* 43

1.1.8. *Teoría de portafolios* 47

1.1.9. *Modelos de Optimización de Portafolios* 55

2. METODOLOGIA 65

2.1. Implementación 66

2.1.1. *Obtención de Datos* 66

2.1.2. *Matriz de rendimientos* 67

2.1.3. *Distribucion de los retornos* 68

2.1.4. *Pruebas de Normalidad* 70

2.1.5. *Prueba Shapiro-Wilk* 71

2.1.6. *Prueba Anderson-Darling* 71

2.1.7. *Creación de los 10 Portafolios* 71

2.1.8. *Matrices de Covarianzas* 72

2.1.9. *Vector porcentual de capitalización bursátil* 73

2.1.10. *Parámetro de aversión al riesgo* 75

2.1.11. *Distribucion Priori del modelo Black-Litterman* 75

2.1.12. *Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM)* 76

2.1.13. *Frontera Eficiente* 78

2.1.14. *Sharpe Ratio Prior* 80

2.1.15. Distribucion a Posteriori del modelo Black-Litterman 80

3. CONCLUSIONES 83

REFERENCIAS 87

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1. *Clasificación de la Inferencia Estadistica* 24

Figura 2. *Contraste de hipótesis unilateral* 28

Figura 3. *Comparativo de la relación entre los errores Tipo I y Tipo II* 31

Figura 4. *Región de aceptación (no rechazo) y rechazo con sus respectivos Valores Críticos (VC)* 33

Figura 5. Criterio de decisión sobre la Hipótesis Nula mediante el uso del p valor: a) Rechazar la hipótesis nula ($\alpha \geq \text{p valor}$) y b) No Rechazar la hipótesis nula ($\alpha < \text{p valor}$). 35

Figura 6. *Flujo del codigo de la prueba Shapiro-Wilk* 41

Figura 7. *Test Anderson-Darling* 43

Figura 8. *Frontera Eficiente* 57

Figura 9. *Inferencia Bayesiana* 60

Figura 10. *Flujo de obtención de datos* 66

Figura 11. *Obtención de la matriz de retornos* 67

Figura 12. *Codigo de la elaboración de la distribucion* 69

Figura 13. *Distribucion de Retornos* 70

Figura 14. *Generador de las listas de los Portafolios* 72

Figura 15. *Generación de las Matrices de covarianza* 72

Figura 16. *Matriz de Covarianza* 73

Figura 17. *Generación de la capitalización Bursátil de las empresas* 74

Figura 18. *Generación de la distribucion a priori* 76

Figura 19. *Generación del modelo CAPM* 77

Figura 20. *Flujo para la frontera eficiente* 79

Figura 21. *Generación de la distribucion a posteriori del modelo Black-Litterman* 81

Figura 22. *Nuevas métricas del portafolio posteriori* 82

Figura 23. *Portafolio Numero 8* 85

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1. *Función De Distribución Acumulada* 15
Tabla 2. *Valor Esperado* 15
Tabla 3. *Distribución Binomial Negativa* 17
Tabla 4. *Distribución Normal* 19
Tabla 5. *Distribución Weibull* 20
Tabla 6. *Distribución Log-Normal* 21
Tabla 7. *Distribución Fisher* 22
Tabla 8. *Distribución T-Student* 23
Tabla 9. *Decisiones sobre la Hipótesis Nula* 29
Tabla 10. *Ventajas y desventajas de las pruebas no paramétricas* 36
Tabla 11. *Matriz de Precios* 67
Tabla 12. *Matriz de retornos* 68
Tabla 13. *Capitalización Bursátil del primer portafolio* 75
Tabla 14. *CAPM del Primer Portafolio* 78
Tabla 15. *Pesos de las Acciones del Primer Portafolio* 80
Tabla 16. *Resultados Portafolios Creados* 83

RESUMEN

El presente trabajo persigue dos objetivos principales. En primer lugar, se busca emplear métodos estadísticos para analizar la aplicación de la teoría de los mercados eficientes en el contexto real. Sobre esta base fundamental, el estudio se centrará específicamente en el modelo Black-Litterman para la optimización de portafolios de activos de renta variable de las principales empresas del índice S&P500.

Mediante la aplicación de este modelo, se construirán varios portafolios que serán evaluados mediante métricas específicas de riesgo y rentabilidad. El análisis detallado permitirá determinar el portafolio más óptimo desde la perspectiva de un inversor, considerando los parámetros de rendimiento y exposición al riesgo.

Palabras clave: Analisis Distribucional, Teoría de portafolios, Inversión en renta variable, modelos estadísticos y Estadistica Bayesiana.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de tiene como objetivo aplicar el método Black-Litterman para analizar las carteras del S&P500 y brindar recomendaciones sobre la asignación óptima de capital a activos de renta variable. Utilizando modelos estadísticos avanzados y simulaciones de Monte Carlo, este análisis tiene como objetivo maximizar la eficiencia en la toma de decisiones de inversión. Con la aparición de nuevos inversores jóvenes y el uso cada vez mayor de corredores de bolsa en línea, el análisis de carteras se ha vuelto más importante que nunca. En este contexto, el Método Black Litterman proporciona un enfoque poderoso para tomar decisiones informadas en mercados volátiles como los activos del S&P 500. También este busca orientar a los inversores interesados en optimizar sus carteras proporcionándoles un análisis detallado del índice S&P500 utilizando el método Black-Litterman, herramienta que basa la asignación de activos subyacentes en estadísticas bayesianas.

A menudo, los inversores se desorientan al intentar invertir en activos de renta variable, ya que se dejan llevar por sus ideales sin considerar el panorama completo. En este trabajo, se ofrecen directrices estadísticas y un análisis detallado de carteras, presentados en un formato paso a paso, que ayudarán a interpretar la información necesaria para adoptar una de las estrategias más efectivas en la inversión en renta variable.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Cuál puede ser el mejor portafolio de inversión con acciones del S&P 500 con la metodologia de Black-Litterman?

OBJETIVOS

Objetivo General

Identificar el mejor portafolio de inversión variando entre el número de acciones y diferentes asignación de acciones del S&P 500, utilizando la metodología Black-Litterman para optimizar la asignación de activos y mejorar las decisiones de inversión en base a las expectativas del mercado y las opiniones del inversionista.

Objetivos Específicos

- Realizar un análisis estadístico descriptivo del comportamiento histórico de las principales acciones del S&P 500 para identificar patrones de rentabilidad en intervalos de tiempo diarios.
- Aplicar la metodología Black-Litterman para dar pesos en los portafolios a las acciones individuales del S&P 500, ajustando las expectativas con datos de mercado como la volatilidad y el rendimiento pasado.
- Medir la eficiencia de los portafolios con indicadores y comparar los portafolios con las principales acciones del S&P 500, utilizando indicadores como el sharpe ratio.
- Comparar los resultados y analizar el portafolio más óptimo para el inversor dependiendo de su preferencia.

ANTECEDENTES

En la investigación de (Vera Castillo & Rosado Muñoz, 2010), se utiliza la simulación de Monte Carlo para abordar la incertidumbre en el mercado accionario, obteniendo un modelo que ayuda a los inversionistas en la toma de decisiones de compra y venta de acciones. Este enfoque resulta relevante para nuestra investigación, ya que la incertidumbre del mercado es un factor decisivo para el objetivo de esta, también puede complementarse con la metodología Black-Litterman para entender las recomendaciones de los pesos del portafolio con las acciones del S&P500.

Un segundo trabajo de (Linares, 2022) . Desarrolla un modelo predictivo basado en redes neuronales artificiales para predecir el precio de las acciones del S&P500, comparando los rendimientos obtenidos con los de un ETF basado en el mismo índice. Esta investigación es relevante para nuestro trabajo, ya que ofrece un contraste entre el uso de redes neuronales y la metodología Black-Litterman en la predicción de tendencias de un portafolio de inversión en renta variable.

Por último, un trabajo de (Cardenas, 2024) desarrolla la teoría de portafolios y compara dos modelos estadísticos para la optimización de portafolios de renta variable. Este estudio es relevante porque aborda la teoría de portafolios, la optimización y la comparación de los mismos, temas que están estrechamente relacionados con los objetivos de este trabajo y que han servido de inspiración en varios aspectos del mismo.

1. MARCO CONCEPTUAL

1.1. Definiciones y Teoría Básica

A continuación, las definiciones de Variable Aleatoria, Función De Distribución Acumulada y Valor Esperado están inspiradas por (Montgomery & Runger, 2014) y (Blanco, 2004) he inspirado por el trabajo de grado de (Paipilla, 2024).

1.1.1. Variable Aleatoria

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) donde Ω es el espacio muestral, F es una sigma-álgebra, y P es una medida de probabilidad. Es una función definida en Ω tal que $[\, X \leq \ x] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \ x\,\}$ es un evento aleatorio para todo x que pertenece a los números reales R, es decir,

$$\Omega \mapsto R$$

Es Variable Aleatoria si $[X \leq \ x]$ pertenece a F ∀ x ∈ R

Las variables aleatorias son discretas cuándo asumen valores en un conjunto finito o infinito numerable, y continuas cuándo asumen valores en un intervalo de la recta real.

1.1.2. Función De Distribución Acumulada (FDA)

La función de distribución o Función de Distribución Acumulada (FDA) de la Variable Aleatoria X, representada por $F(X)_{\{x\}}$ o simplemente $F(x)$ es definida por:

- $F(x) = P(X \leq \ x) \quad con \quad x \in \ R$
- $lim_{\{x \to -\infty\}} \ \ F(X) = 0$
- $lim_{x \to \infty} \, F(X) = 1$
- $F(x) = F(x^{+})$, es decir, es continua por la derecha
- Es no decreciente, esto es, $\$F(x) \leq \ F(y)\$$ siempre que $x \leq \ y$, ∀ x y ∈ R

Una variable aleatoria X en (Ω, F, P), con función de distribución acumulada F, será clasificada como discreta o continúa si:

Tabla 1.

Función De Distribución Acumulada.

X Discreta	X Contínua
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i)$	$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$
$\mathbb{P}(X = x_i) = f(x)$ es funcion de probabilidad	$f(x)$ es funcion de densidad
$f(x)$ cumple: (1) $0 \leq f(x) \leq 1$ (2) $\sum_i f(x_i) = 1$	$f(x)$ cumple: (1) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Nota. En la tabla se muestra como se definen una funcion de distribucion acumulada tanto discreta como continua. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación.

1.1.3. Valor Esperado

El valor esperado o media de una variable aleatoria es una cantidad frecuentemente utilizada como resumen del comportamiento de la variable y sirve como parámetro para varios modelos probabilísticos.

Tabla 2.

Valor Esperado

X Discreta	X Contínua
Valor Esperado $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i f(x_i)$	Valor Esperado $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

Nota. En la tabla se observa cómo se define el valor esperado de una distribución tanto discreta como continua. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación.

Propiedades del valor esperado:

Sean X e Y variable aleatorias en (Ω, F, P) y $a, b \geq 0$

- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- Si $X \geq Y$ en Ω, entonces $E(X) \geq E(Y)$

1.1.4. Distribuciones

Las Siguientes distribuciones que se mencionan a continuación con sus respectivos parámetros, soporte, funciones de densidad o probabilidad, valores esperados $E(X)$ y varianzas $V(X)$ se tomaron de (Blanco, 2004) y (Lutkevich, 2020), he inspirado por el trabajo de grado de (Paipilla, 2024).

a. Distribución Binomial Negativa

La distribución binomial negativa, también conocida como distribución de pascal, modela el número de ensayos independientes de Bernoulli necesarios para obtener un número fijo de éxitos en un experimento. A diferencia de la distribución binomial, donde se fija el número de ensayos y se cuenta el número de éxitos, en la binomial negativa se fija el número de éxitos y se cuenta el número de ensayos necesarios para lograr esos éxitos. Se utiliza en situaciones donde se repiten ensayos hasta alcanzar un cierto número de éxitos, La distribución binomial negativa se usa comúnmente para modelar el número de ensayos hasta que ocurre un determinado número de fallos en un sistema de producción A continuación, en la Tabla 3 se presenta su función de probabilidad, parámetros, soporte valor esperado y varianza.

Tabla 3.

Distribución Binomial Negativa

Distribucion	$X \sim B_N(r,p)$
Funcion de Probabilidad	$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x$
Parámetros	$r \in \mathbb{Z}^+$ $p \in (0,1)$
Soporte	$x \in \{0,1,2,\dots\}$
$E(x)$	$\frac{r(1-p)}{p}$
$V(x)$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$

Nota. En la tabla se observa las principales propiedades de la distribucion binomial negativa. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación. y Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

b. Distribución Normal.

La distribución normal, también conocida como distribución gaussiana, es una distribución de densidad muy utilizada en diversos ámbitos estadísticos. Desarrollada por Gauss en el siglo XIX, esta distribución se caracteriza por su forma de campana y su simetría respecto a la media.

Esta distribución se emplea particularmente en la modelación de fenómenos naturales y psicológicos, como la altura de los seres humanos o los errores de medición en experimentos científicos. Su importancia radica en su amplio uso en el análisis estadístico, la teoría de la probabilidad y la inferencia estadística. En la Tabla 4 se presentan su función de densidad, parámetros, soporte, valor esperado y varianza.

La distribucion normal es una distribucion de densidad, esta se conoce como la distribucion gaussiana, esta distribucion es la mas utilizada en casi todos los ámbitos de nuestra existencia si en términos estadísticos hablamos, Fue desarrollada por Gauss en

el siglo XIX, una característica única es que tiene forma de campana y es simétrica desde su media. Como se mencionó se utiliza particularmente en casos específicos como modelación de fenómenos naturales y pscologicos, como la altura de los seres humanos o errores de medición en experimentos científicos, de aquí su importancia en el analisis estadistico, en la teoría de probabilidad y la inferencia estadistica, a continuación en la tabla 4 se muestra sus respectivos funcion de densidad, parámetros, soporte, valor esperado y varianza.

Tabla 4.

Distribución Normal

Distribucion	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Funcion de Densidad	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Parámetros	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$
Soporte	$x \in \mathbb{R}$
$E(x)$	μ
$V(x)$	σ^2

Nota. En la tabla se observa las principales propiedades de la distribucion normal. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación. y Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

c. Distribución Weibull.

La distribución Weibull es una distribución de probabilidad continua utilizada para modelar la tasa de fallas de componentes mecánicos y electrónicos, así como la vida útil de productos. Fue propuesta por primera vez por Waloddi Weibull en 1951 y se caracteriza por tener una forma flexible que puede describir tanto fenómenos de tasa de fallos decreciente como creciente. Se utiliza ampliamente en ingeniería, confiabilidad y análisis de supervivencia para modelar el tiempo hasta el fallo de un componente o sistema. A continuación, en la Tabla 5 se presenta su función de densidad, parámetros, soporte valor esperado y varianza.

Tabla 5.

Distribución Weibull

Distribucion	$X \sim W(\alpha, \lambda)$
Funcion de Densidad	$f(x) = \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-(\lambda x)^{\alpha}}$
Parámetros	$\lambda > 0$ $\alpha > 0$
Soporte	$x \in (0, +\infty)$
$E(x)$	$\frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$
$V(x)$	$\frac{1}{\lambda^2}\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$

Nota. En la tabla se observa las principales propiedades de la distribucion weibull. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación. y Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

d. Distribución Log-Normal.

La distribución log-normal es una distribución de probabilidad continua cuyos logaritmos tienen una distribución normal. Es utilizada para modelar datos que tienen una distribución asimétrica positiva, donde los valores más pequeños son más probables que los valores más grandes. Esta distribución es común en finanzas, biología, geología y otras áreas donde los datos tienen una distribución sesgada hacia valores más altos. Por ejemplo, los precios de las acciones y los ingresos suelen seguir una distribución log-normal. A continuación, en la Tabla 6 se presenta su función de densidad, parámetros, soporte valor esperado y varianza.

Tabla 6.

Distribución Log-Normal

Distribucion	$X \sim LogN(\mu, \sigma^2)$
Funcion de Densidad	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Parámetros	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$
Soporte	$x \in (0, \infty)$
$E(x)$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$
$V(x)$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$

Nota. En la tabla se observa las principales propiedades de la distribucion log-normal. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación. y Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

e. Distribución Fisher.

La distribución F es una distribución de probabilidad continua utilizada principalmente en análisis de varianza (ANOVA) para comparar varianzas de dos o más muestras. Fue desarrollada por Ronald Fisher en 1928 y se utiliza en pruebas de hipótesis para evaluar si las varianzas de varias poblaciones son iguales o diferentes. Es una distribución sesgada positivamente con dos parámetros: los grados de libertad del numerador y los grados de libertad del denominador. A continuación, en la Tabla 7 se presenta su función de densidad, parámetros, soporte valor esperado y varianza.

Tabla 7.

Distribución Fisher

Distribucion	$X \sim F(m,n)$
Funcion de Densidad	$\frac{\sqrt{\frac{(mx)^m n^n}{(mx+n)^{m+n}}}}{x\boldsymbol{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}$
Parámetros	$m,n > 0$ grados de libertad
Soporte	$x \in [0,\infty)$
$E(x)$	$\frac{n}{n-2}$ para $n > 2$
$V(x)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ para $n > 4$

Nota. En la tabla se observa las principales propiedades de la distribucion fisher. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación. y Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

f. Distribución T-Student.

La distribución t-Student, comúnmente conocida como distribución t, fue propuesta por William Sealy Gosset en 1908 como una solución para estimar la media de una población cuando el tamaño de la muestra es pequeño y la varianza poblacional es desconocida. Esta distribución se utiliza en pruebas de hipótesis y análisis estadístico cuando se trabaja con muestras pequeñas. Es similar a la distribución normal, pero tiene colas más gruesas, lo que la hace más robusta frente a la presencia de valores atípicos en los datos. A continuación, en la Tabla 8 se presenta su función de densidad, parámetros, soporte valor esperado y varianza.

Tabla 8.

Distribución T-Student

Distribucion	$X \sim t(v)$
Funcion de Densidad	$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\frac{1+x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$
Parámetros	$v > 0$ grados de libertad
Soporte	$x \in (-\infty, \infty)$
$E(x)$	0 para $v > 1$, indefinida para otros valores
$V(x)$	$\frac{v}{v-2}$ para $v > 2$, indefinida para otros valores

Nota. En la tabla se observa las principales propiedades de la distribucion t-student. Tomado de: Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion. Mexico: Pearson Educación. y Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

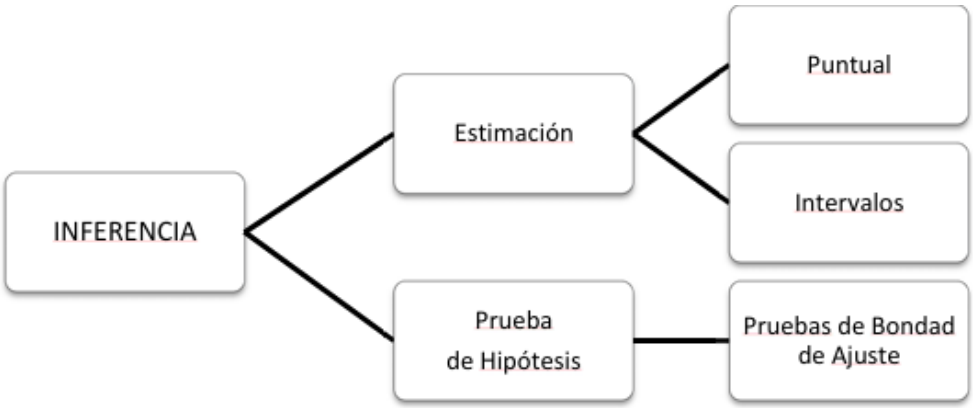
1.1.5. Estadistica Inferencial

La estadistica inferencial hace referencia al conjunto de procedimientos estadísticos que implican la implementación de modelos probabilísticos, que permiten tomar decisiones sobre poblaciones basadas en la informacion obtenida a partir de muestras (Carmona & Carrion, 2015).

Esta es el proceso de utilizar conclusiones a partir de una muestra para dar conclusiones sobre los comportamientos de la población que se quiere representar en la muestra. Principalmente esta se ocupa de estimar los parámetros y las pruebas de hipótesis como se mostrara más adelante en el trabajo (Carmona & Carrion, 2015).

Figura 1.

Clasificación de la Inferencia Estadistica



***Nota*.** Flujograma que explica cómo se divide la estadistica inferencial. Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

La estimación de parámetros constituye un proceso metodológico que permite aproximar los valores reales de una población, comúnmente denominados parámetros poblacionales. En este contexto, el trabajo se centrará principalmente en la prueba de hipótesis, cuyo objetivo fundamental radica en determinar o comprobar la existencia de evidencia estadística que respalde una aseveración específica sobre un parámetro o un conjunto de parámetros poblacionales.

Para ello, se considerará de manera rigurosa la información muestral disponible, empleando herramientas estadísticas que permitan contrastar la validez de las afirmaciones propuestas. La prueba de hipótesis se configura así como un método científico que posibilita la toma de decisiones objetivas basadas en evidencia empírica.

En el ámbito de las pruebas de hipótesis, las pruebas de bondad de ajuste desempeñan un papel fundamental en la investigación. Estas pruebas estadísticas se emplean para

determinar si una muestra de datos se ajusta significativamente a una distribución teórica previamente establecida.

El objetivo principal radica en someter a verificación la conformidad entre los datos observados y una distribución teórica específica, mediante un riguroso proceso de prueba de hipótesis. Este análisis permite comprobar la validez de la afirmación sobre el comportamiento estadístico de la muestra en relación con el modelo teórico propuesto.

a. Conceptos Básicos.

Para comprender mejor esta metodología de las pruebas de bondad de ajuste, se presentan algunas definiciones para un mejor entendimiento del tema.

b. Hipótesis Estadistica.

En el ámbito de la estadística, una hipótesis se define como una afirmación específica sobre una población o un conjunto de poblaciones. Estas hipótesis se formulan de manera precisa y estructurada, permitiendo su evaluación mediante técnicas estadísticas especializadas.

Cada prueba de hipótesis se caracteriza por estar compuesta invariablemente por dos hipótesis fundamentales: la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. Este enfoque metodológico permite a los investigadores someter a rigurosa verificación las proposiciones planteadas sobre las características de una población, utilizando herramientas estadísticas que proporcionan evidencia empírica para su contrastación.

c. Hipótesis Nula.

La hipótesis nula, denotada por $\boldsymbol{H_0}$, esta es la hipótesis que se desea contrastar. Esta se somete a la comprobación por las técnicas estadísticas y es la hipótesis que no se rechaza o se rechaza en las conclusiones finales de la prueba (Carmona & Carrion, 2015).

d. Hipótesis Alternativa.

Como su nombre lo indica esta es la hipótesis que contrarresta a la hipótesis nula, esto quiere decir que es la otra opción si la hipótesis nula no es cierta, a esta la denotaremos como $\boldsymbol{H_1}$.

En el contexto de la inferencia estadística, las hipótesis nula y alternativa se caracterizan por ser mutuamente excluyentes. Esto significa que únicamente una de ellas puede ser verdadera en un momento determinado. Cuando se establece que la hipótesis nula es cierta, la hipótesis alternativa necesariamente debe ser falsa, y viceversa. (Carmona & Carrion, 2015).

Esta condición de exclusividad constituye un principio fundamental en la construcción y análisis de pruebas de hipótesis, donde el objetivo central radica en determinar cuál de las dos proposiciones encuentra respaldo en la evidencia estadística disponible.

En el caso de las pruebas de bondad de ajuste, la hipótesis se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$$

$$\boldsymbol{vs}$$

$$\boldsymbol{H_0}: \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) \neq \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$$

Donde se asume una muestra aleatoria (M.A.) $x_1, x_2, \dots, x_n$ de alguna funcion de densidad $f(x;\theta)$, con su correspondiente función de distribución acumulada (FDA) mencionada anteriormente $F(x;\theta)$ dónde: $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^m \quad m \geq 1$, $\boldsymbol{\Omega}$ es el espacio de parámetros y $F^*(x;\theta)$ es la función de distribución acumulada teórica. (Carmona & Carrion, 2015).

e. Prueba de Hipótesis.

La prueba de hipótesis se configura como un procedimiento metodológico riguroso en el campo estadístico, cuyo propósito fundamental consiste en analizar la información de una muestra para determinar si los datos proporcionan evidencia suficiente que respalde o refute una hipótesis estadística previamente formulada.

Este proceso implica un examen sistemático de la información disponible, aplicando técnicas estadísticas especializadas que permiten evaluar la validez de las afirmaciones planteadas sobre una población determinada.

En el ámbito de las pruebas estadísticas, resulta prácticamente imposible determinar con total certeza el rechazo o no rechazo de una hipótesis sin examinar la población

completa. Esta limitación, principalmente originada por restricciones de recursos, conduce a la utilización de muestras aleatorias representativas.

A través de la información extraída de dichas muestras, los investigadores buscan obtener evidencias que permitan contrastar la hipótesis planteada. Es fundamental comprender que el no rechazo de la hipótesis nula no implica su veracidad absoluta, sino que sugiere que los datos disponibles no proporcionan suficiente evidencia estadística para refutarla.

Por el contrario, el rechazo de la hipótesis nula indica que la evidencia estadística cuestiona significativamente la proposición inicial. Este proceso de inferencia estadística reconoce implícitamente la posibilidad de incurrir en dos tipos de errores durante la evaluación como lo que se muestra a continuación.

f. Error Tipo I.

El error de tipo I se comete al rechazar la $\boldsymbol{H_0}$ y esta resulta ser verdadera, este tipo de error es el mas peligroso y el mas grave de cometer en una investigación, es denotado con la letra griega $\boldsymbol{\alpha}$ y lo mas común es que se le asigne un valor de 0.05 y este es equivalente a encontrar un resultado falso positivo. (Quezada, 2007).

Este se le conoce por el nombre del **nivel de significancia** y se define como una probabilidad condicionada, como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula $\boldsymbol{H_0}$ cuando esta es verdadera. (Carmona & Carrion, 2015).

$$\boldsymbol{\alpha = P[Error\ Tipo\ I] = P[Rechazar\ H_0|H_0]}$$

g. Error Tipo II.

El error tipo II se comete cuando no se rechaza la $\boldsymbol{H_0}$ y resulta ser falsa, esta se denota con la letra griega $\boldsymbol{\beta}$, este es equivalente a encontrar un resultado falso negativo. En términos de probabilidad condicionada, se define como la probabilidad de no rechazar la hipótesis nula $\boldsymbol{H_0}$ cuando esta es errónea, esta formulación se muestra en la siguiente ecuación. (Carmona & Carrion, 2015).

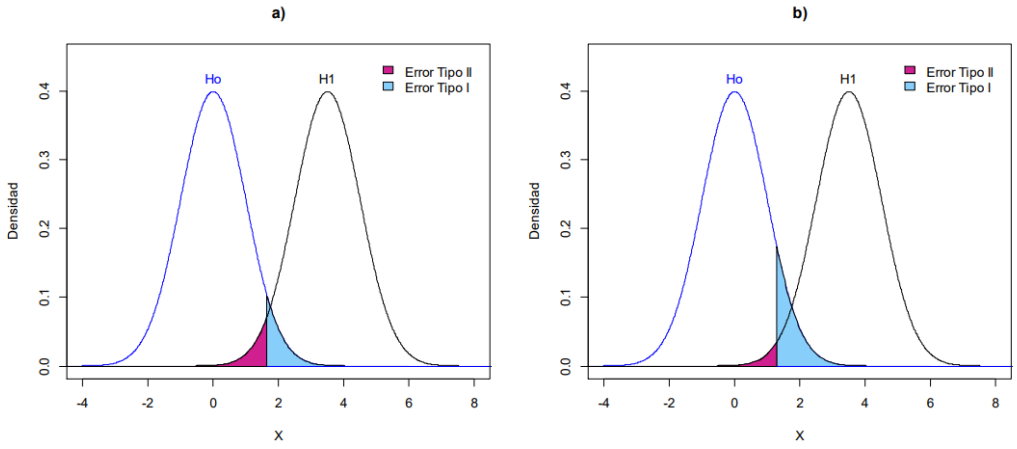
$$\boldsymbol{\beta = P[Aceptar\ H_0|H_1]}$$

Es fundamental que las probabilidades de ocurrencia de los dos tipos de errores estadísticos sean lo más bajas posible. No obstante, existe una relación inversamente proporcional entre estos errores. Por ejemplo, cualquier decisión que reduzca la probabilidad de rechazar incorrectamente una hipótesis nula verdadera inevitablemente aumentará la probabilidad de no rechazar la hipótesis cuando esta es falsa, y viceversa. Este fenómeno se presenta de manera simétrica en el escenario opuesto.

Solo existe una forma de reducir ambos errores al mismo tiempo, que es aumentar el tamaño de la muestra que se esté analizando, como esto no siempre es posible el estadistico o investigador tiene que hallar un equilibrio entre $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ como se muestra en la Figura 2. (Carmona & Carrion, 2015).

Figura 2.

Contraste de hipótesis unilateral



Nota. En la figura se muestra el contraste de hipótesis unilateral con dos niveles de significancia: a) 5% ($\boldsymbol{\alpha = 0.05}$) y b) 10% ($\boldsymbol{\alpha = 0.10}$) para comparar la potencia estadística. Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

Por otro lado, las decisiones correctas en el contraste de hipótesis se definen como:

h. Nivel de Confianza.

Este es el complemento del error tipo I $\boldsymbol{\alpha}$, esto quiere decir que se define como la probabilidad de no rechazar $\boldsymbol{H_0}$ cuando es verdadera, y se denota mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{Aceptar\ H_0}|\boldsymbol{H_0}]$$

i. Potencia Estadistica.

Esta es el complemento del error tipo II β, esta se define como la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa, y se denota mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{Rechazar\ H_0}|\boldsymbol{H_1}]$$

El concepto de potencia estadística fue introducido por primera vez en el ámbito experimental por (Cohen, 1962). Su trabajo destacó la importancia de la potencia estadística y estableció las directrices fundamentales para realizar un análisis de potencia. Esta contribución motivó a los investigadores a prestar mayor atención a la potencia en las pruebas estadísticas, trascendiendo el enfoque tradicional centrado únicamente en el nivel de significancia.

En la Tabla 9 se resumen las situaciones posibles en una prueba o contraste de hipótesis al tomar la decisión sobre la hipótesis nula.

Tabla 9.

Decisiones sobre la Hipótesis Nula

Decisiones sobre $\boldsymbol{H_0}$	Situación Real	
	H_0 Cierta	H_0 Falsa
Aceptar H_0	Nivel de Confianza $1 - \alpha$	Error Tipo II β
Rechazar H_0	Error Tipo I α	Potencia Estadistica $1 - \beta$

Nota. En la tabla se muestra el contraste de Hipótesis conforme la toma de decisión sobre la Hipótesis Nula. Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling,

Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

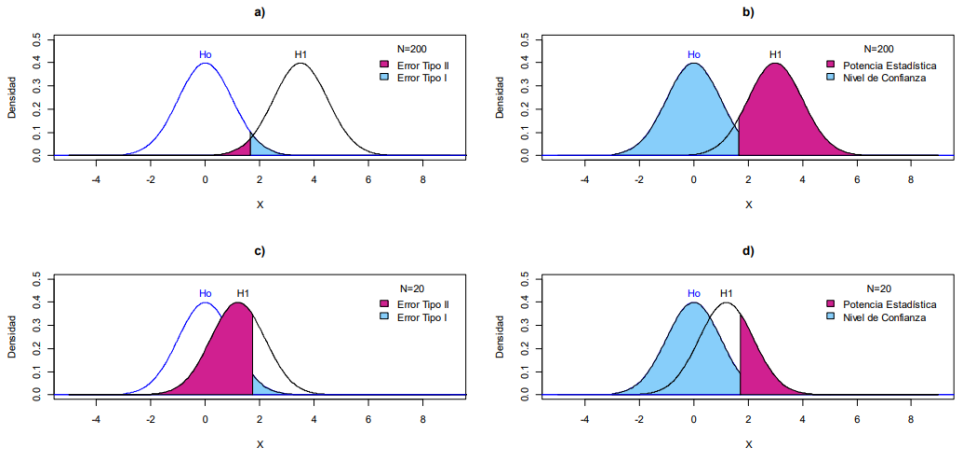
La estimación de la potencia estadística depende principalmente de dos factores. El primer factor es el tamaño de la muestra, cuya relación es directamente proporcional: a mayor tamaño de muestra, mayor será la potencia estadística, tal como se ilustra en la representación gráfica.

Cuando el tamaño de la muestra es pequeño, por ejemplo, $\boldsymbol{n} = \mathbf{20}$, el error tipo II resulta considerablemente más alto, lo que conduce a una potencia estadística significativamente más baja en comparación con el nivel de significancia establecido. En contraste, al aumentar el tamaño de la muestra a $\boldsymbol{n} = \mathbf{200}$, se observa una notable disminución del error tipo II, lo que permite incrementar la potencia estadística.

Por otro lado, el segundo factor determinante de la potencia estadística es el nivel de significancia. Al incrementar este nivel, se produce un aumento en la potencia estadística, lo cual está directamente relacionado con un incremento del error tipo I. (Ver Figura 3).

Figura 3.

Comparativo de la relación entre los errores Tipo I y Tipo II



Nota. En la figura se muestra el comparativo de la relación entre los errores Tipo I y Tipo II (incisos a y c); así como la Potencia Estadística y el Nivel de Significancia (incisos b y d), mediante un contraste de hipótesis unilateral con 5% de significancia ($\boldsymbol{\alpha = 0.05}$) y dos tamaños de muestra $\mathbf{(n = 200, 20)}$. Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

j. Estadistico de Prueba.

El estadístico de prueba constituye un valor numérico fundamental que permite al investigador extraer conclusiones estadísticas, facilitando la determinación de si se rechaza o no se rechaza una hipótesis específica. Para tomar decisiones precisas en este proceso, los investigadores establecen reglas metodológicas que guían la interpretación de los resultados, lo que conduce a la definición de dos tipos de regiones analíticas esenciales para la toma de decisiones estadísticas.

k. Región de Aceptación.

Esta es un área donde, si el estadístico de prueba se ubica dentro de sus límites, la hipótesis nula $\boldsymbol{H}_0$ no es rechazada, tal como se muestra en la ilustración 4.

l. Región de Rechazo.

Esta es un área donde, si el estadístico de prueba se ubica dentro de sus límites, la hipótesis nula $\boldsymbol{H}_0$ es rechazada, tal como se muestra en la ilustración 4.

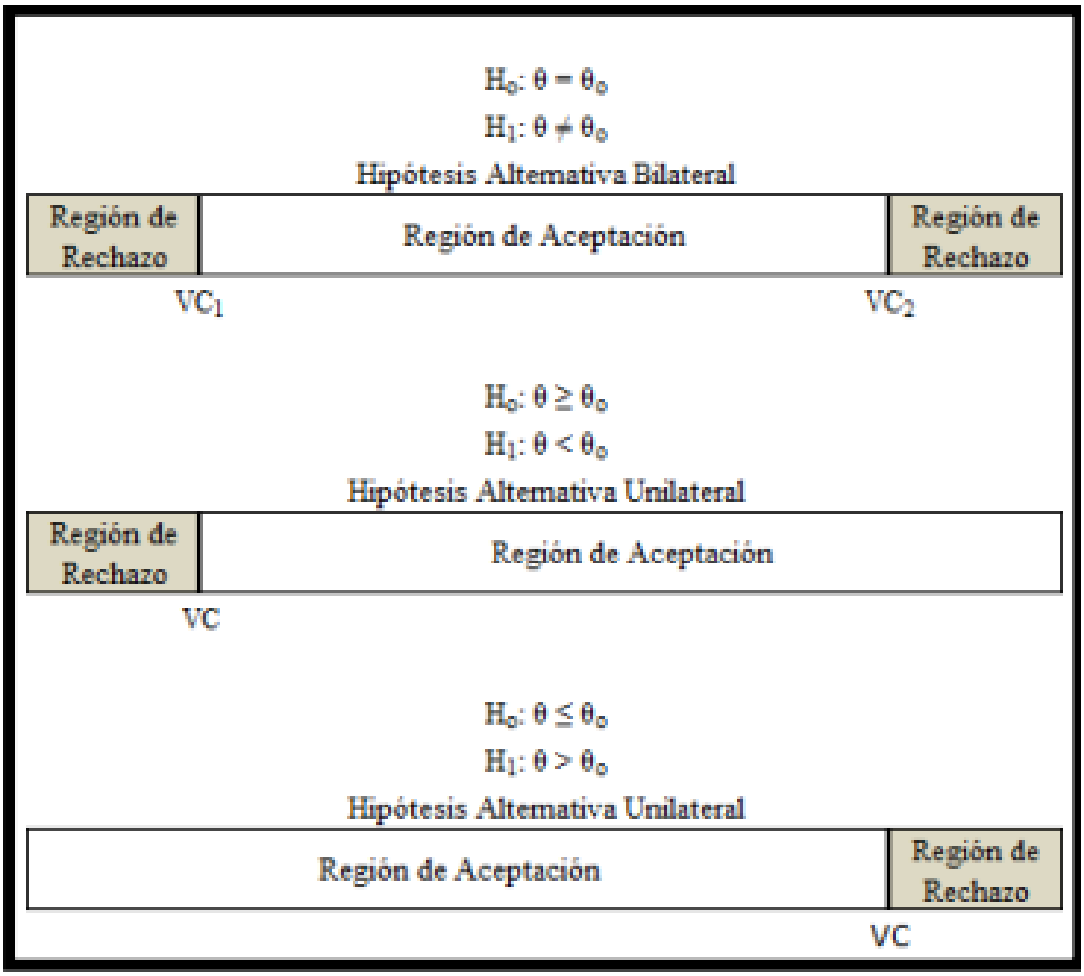
El punto de división entre estas dos regiones recibe el nombre de valor crítico, cuya determinación depende de tres elementos fundamentales: el nivel de significancia asignado, el tipo de distribución estadística que se está utilizando y la naturaleza de la hipótesis planteada, la cual puede ser unilateral o bilateral.

- En la hipótesis bilateral, la región de rechazo se distribuye simétricamente en ambos extremos de la distribución estadística, denominados comúnmente como "colas".
- En la hipótesis unilateral, la región de rechazo se ubica exclusivamente en una de las dos "colas" de la distribución. Esta configuración estadística delimita el área de rechazo de la hipótesis nula a un único extremo de la distribución.

Cabe aclarar que los valores críticos pertenecen a la región de rechazo, como se aprecia en la Figura 4.

Figura 4.

Región de aceptación (no rechazo) y rechazo con sus respectivos Valores Críticos (VC)



Nota. En la figura se muestra las diferentes pruebas de hipótesis y sus respectivas regiones de no rechazo y rechazo. Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

a. P-Valor.

Según (Gujarati, 2006) la debilidad del planteamiento clásico de la estadistica es la arbitrariedad a la hora de elegir un nivel de significancia, aunque del 1%, 5% y 10% son los más utilizados no hay nada irrefutable de no utilizar otros.

En la práctica estadística contemporánea, los investigadores generalmente prefieren determinar el valor p, el cual se define como el nivel de significancia más pequeño bajo el cual resulta posible rechazar la hipótesis nula. Al ser una probabilidad, este valor cumple con la siguiente condicion:

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{Valor\ p} \leq \mathbf{1}$$

Dando continuidad, se tiene un estadistico de prueba $\boldsymbol{W}$, y basándonos en un nivel de significancia α. Si el nivel de significancia es mayor o igual a nuestro valor p ($\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{valor\ p}$), se rechaza H_0. De lo contrario, si $\boldsymbol{\alpha}$ es menor que el valor p ($\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{valor\ p}$), no se rechaza la H_0 en la Figura 5 se muestra de forma más gráfica y comprensible.

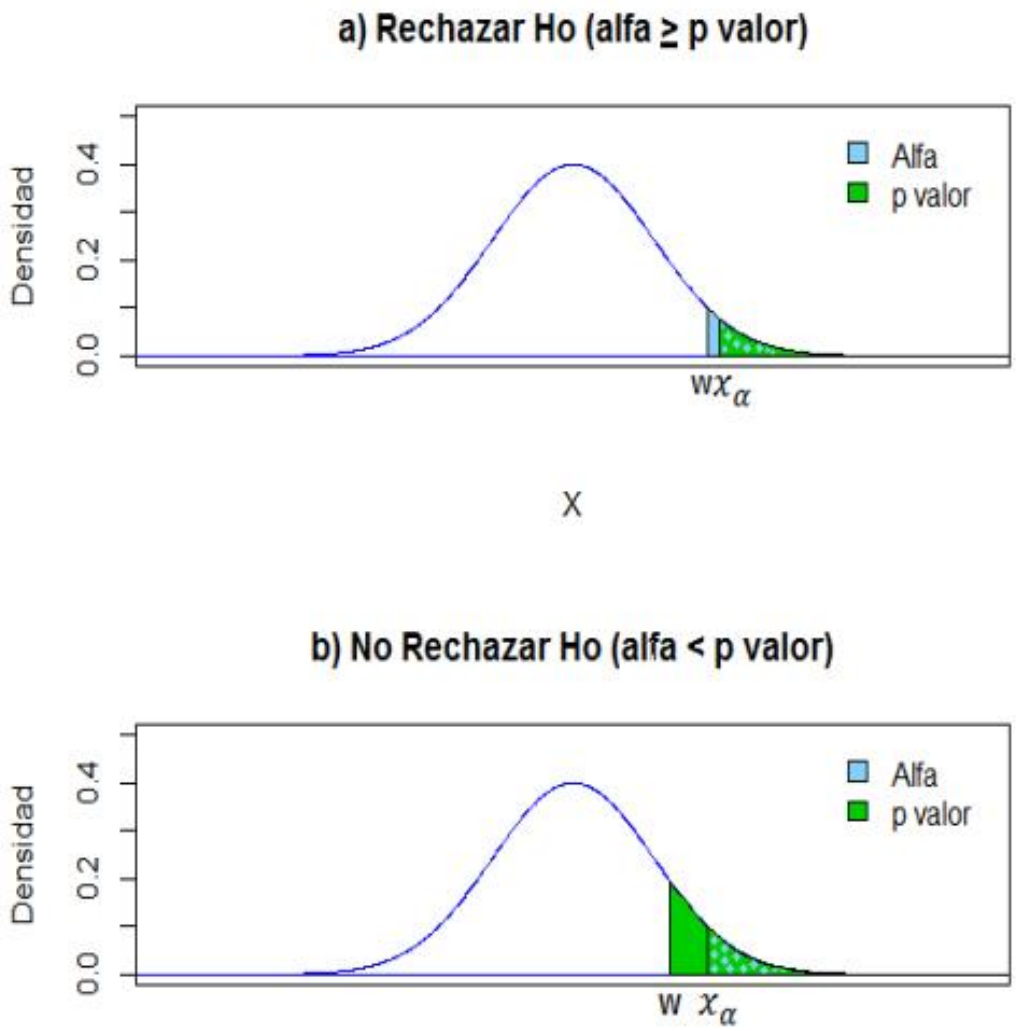
Como conclusión metodológica, el investigador puede interpretar que un valor p muy pequeño sugiere una evidencia estadística significativa que no respalda la hipótesis nula. Este resultado indicaría que los datos presentan una probabilidad muy baja de ocurrir si la hipótesis nula fuera verdadera, lo que permite cuestionar su validez.

Por el contrario, cuando el valor p resulta considerablemente alto, el investigador puede concluir que los datos disponibles no proporcionan argumentos suficientes para rechazar la hipótesis nula. En este escenario, la información estadística respalda la proposición inicial, sugiriendo que no existe evidencia estadística concluyente para contradecirla.

Esta interpretación constituye un proceso fundamental en la toma de decisiones estadísticas, donde el valor p actúa como un indicador crítico para evaluar la significancia y validez de las hipótesis planteadas en una investigación.

Figura 5.

Criterio de decisión sobre la Hipótesis Nula mediante el uso del p valor: a) Rechazar la hipótesis nula ($\boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{p\ valor}$) y b) No Rechazar la hipótesis nula ($\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{p\ valor}$).



Nota. En la figura se muestra el criterio de decisión sobre la Hipótesis Nula mediante el uso del p valor: a) Rechazar la hipótesis nula ($\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{p\ valor}$) y b) No Rechazar la hipótesis nula ($\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{p\ valor}$). Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

1.1.6. Pruebas de Bondad de Ajuste

Las pruebas de bondad de ajuste constituyen una herramienta estadística fundamental cuyo objetivo primordial es determinar si un conjunto de datos observados se ajusta significativamente a una distribución teórica predeterminada.

Estas pruebas se clasifican dentro de las denominadas pruebas no paramétricas, las cuales se caracterizan por no requerir especificaciones previas sobre los parámetros poblacionales. Su metodología se distingue por presentar criterios de aplicación detallados y precisos, lo que permite una implementación rigurosa en diversos contextos de investigación.

Generalmente, las pruebas no paramétricas emergen como una alternativa metodológica en aquellos escenarios donde las pruebas paramétricas tradicionales presentan limitaciones o no pueden aplicarse de manera convencional. Su flexibilidad y capacidad para adaptarse a diferentes condiciones de los datos las convierten en una herramienta analítica versátil y potente para los investigadores.

La utilización de estas pruebas permite abordar problemas estadísticos complejos, especialmente cuando los supuestos de normalidad, homocedasticidad u otros requerimientos de las pruebas paramétricas no se cumplen de manera estricta, ofreciendo así una alternativa metodológica robusta y confiable.

Tabla 10.

Ventajas y desventajas de las pruebas no paramétricas

Ventajas	Desventajas
Las declaraciones de probabilidad obtenidas de la mayoría de estas pruebas son probabilidades exactas, independientemente de la forma de la distribución de la que se tomó la muestra.	Fundamentalmente cuando las muestras son muy grandes estas pruebas tienen una eficiencia relativamente baja con relación a las paramétricas, cuando se cumplen los supuestos.

Si los tamaños de las muestras son tan pequeños como n=6, se debe realizar una prueba estadística no paramétrica, a menos que se conozca exactamente la naturaleza de la distribución.	Su aplicación en muestras grandes se hace muy laboriosa.
Son útiles para los datos clasificatorios, medidos en una escala nominal. Ninguna técnica paramétrica se puede aplicar a tales datos.	No hay métodos no paramétricos para probar las interacciones dentro del modelo de análisis de varianza, a menos que se hagan suposiciones especiales acerca de la adaptabilidad.
Las pruebas estadísticas no paramétricas son típicamente mucho más fáciles de aplicar que las pruebas paramétricas.	Las hipótesis que se plantean en éstas pruebas son menos precisas, lo que hace que la interpretación de los resultados sea más ambigua.
Tienen mayor eficiencia que los métodos paramétricos en distribuciones asimétricas, o sea cuando hay valores atípicos o datos aberrantes.	Si los supuestos del modelo estadístico paramétrico se cumplen, las pruebas no paramétricas disipan los datos.
Tienen validez en el sentido de que su nivel de confiabilidad es realmente el especificado en la mayoría de las pruebas.	Estos métodos son preferencialmente orientados hacia las Pruebas de Hipótesis que a la Estimación. Suele ser posible obtener estimaciones no paramétricas y sus intervalos de

	confianza asociados, pero generalmente no es sencillo.
Estas pruebas son mucho menos exigentes que las paramétricas, y se consideran de distribución libre, en cuanto que no plantean suposiciones con relación a la distribución de las puntuaciones en la población.	Para un problema particular pueden existir varias pruebas, por lo que en ocasiones es difícil seleccionar la mejor.
Algunos de los procesos sólo requieren los rangos de las observaciones y no de sus magnitudes, mientras que los procesos paramétricos las necesitan forzosamente.	Puede ser limitado el software para este tipo de métodos, así como su procedencia. Además, la manera en que el software le da tratamiento a los valores ajustados o cómo es que se obtiene adecuadamente el valor p puede ser no tan evidente.

Nota. En la tabla se muestran las ventajas y desventajas de utilizar pruebas no parametricas. Tomado de: Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

a. Prueba Shapiro-Wilk.

La prueba Shapiro Wilk ($\boldsymbol{SW}$), se restringió originalmente para tamaños de muestra pequeños ($\boldsymbol{n} < \mathbf{50}$). Esta prueba fue la primera que fue capaz de detectar desviaciones de la normalidad, ya sea debido a la asimetría o curtosis, o ambos (Althouse, Ware, & Ferron, 1998). Se ha convertido en la prueba preferida debido a sus buenas propiedades

de potencia en comparación con una amplia gama de pruebas alternativas (Mendes & Pala, 2003).

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{H_0: la\ muestra\ sigue\ una\ distribucion\ Normal}$$

$$\boldsymbol{H_1: la\ muestra\ No\ sigue\ una\ distribucion\ Normal}$$

La prueba de Shapiro-Wilk representa un método estadístico sofisticado fundamentado en técnicas de regresión y correlación, cuyo propósito fundamental es evaluar la normalidad de una muestra específica. Su diseño metodológico incorpora estadísticos de orden que requieren una preparación previa de los datos, los cuales deben ser organizados de manera ascendente.

Esta prueba se distingue por su capacidad para contrastar rigurosamente la distribución de los datos contra los parámetros de una distribución normal, utilizando un enfoque que combina análisis de regresión con correlaciones estadísticas. La ordenación ascendente de la muestra constituye un requisito metodológico esencial que permite aplicar con precisión los procedimientos de cálculo inherentes a esta técnica de evaluación de normalidad.

La complejidad del método radica en su capacidad para detectar desviaciones sutiles de la normalidad, proporcionando a los investigadores una herramienta analítica robusta para determinar la distribución probabilística de sus datos experimentales.

Según (Shapiro & Wilk, 1965) esta prueba se basa en dos estimadores de la desviación estándar: L_n , también se recurre al mejor estimador lineal y por ultimo al estimador de máxima verosimilitud todo bajo la misma hipótesis.

El estadístico de prueba se define por lo siguiente:

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_{(i)}\right)^2}{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right]}$$

Donde:

$x_{(i)}$: i-esima estadistica de orden.

$\bar{x} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)$: Media de la muestra.

$$a_i = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}}$$

$m = (m_1, \dots, m_n)^T$: Valores esperados de las estadísticas de orden.

V: Matriz de covarianza de las estadísticas de orden.

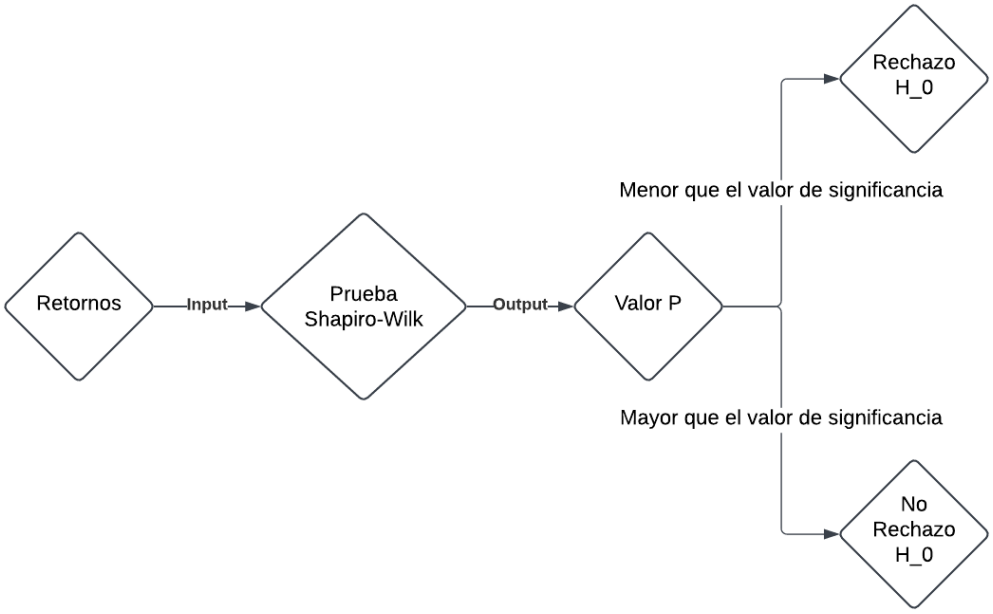
Sabiendo que $\boldsymbol{a_i}$, son los coeficientes normalizados del estimador lineal insesgado optimo llamado por sus siglas en ingles BLUE (Best lineal unbiased estimator) de sigma $\boldsymbol{\sigma}$ y $\sum a_i x_{(i)}$ es el estimador lineal insesgado óptimo de la pendiente de la regresión de $\boldsymbol{x_{(i)}}$ con respecto a $\boldsymbol{a_i}$. (Carmona & Carrion, 2015)

Esta prueba fue modificada y mejorada por (Royston, 1982) para que el tamaño de la muestra no estuviera tan limitado, esto lo logro implementando el algoritmo AS 181, donde el propósito de esto era habilitar el cálculo de estadistico de prueba $\boldsymbol{W}$ y su nivel de significancia a un tamaño de muestra menos limitado ($\mathbf{3} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{2000}$).

En este trabajo se utilizara el lenguaje de programación Python para hacer el test de normalidad a los activos de renta variable que se tienen en el trabajo como se muestra en la Figura 6.

Figura 6.

Flujo del codigo de la prueba Shapiro-Wilk



Nota. En la figura se muestra a través de un flujograma como se programó la prueba Shapiro-Wilk.

b. Prueba de Anderson-Darling.

Esta prueba es una herramienta estadística que permite evaluar si una muestra de datos proviene de una población con una distribución probabilística específica. El método se fundamenta en la función de distribución empírica (FDE), que compara la distribución observada en los datos con una distribución teórica predefinida. Los estadísticos utilizan esta prueba para verificar la bondad de ajuste de una muestra a un modelo de distribución determinado, a continuación se muestra la prueba de hipótesis que tiene la prueba:

$$\boldsymbol{H_0: la\ muestra\ proviene\ una\ distribucion\ especifica.}$$

$$\boldsymbol{H_1: la\ muestra\ No\ proviene\ una\ distribucion\ especifica.}$$

La funcion de distribucion empírica (FDE) se define como una muestra aleatoria (M.A.) de tamaño $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ y sean $\boldsymbol{X_{(1)}}, \dots, \boldsymbol{X_{(n)}}$ las estadísticas de orden. Se supone también que la distribucion de $\boldsymbol{X}$ es $\boldsymbol{F(x)}$. Entonces, la funcion de distribucion empírica (FDE) denotada como $\boldsymbol{F_n(x)}$, es una funcion tal que:

$$\boldsymbol{F_n(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{x < X_{(1)}} \\ \boldsymbol{X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)}, i = 1, 2, \dots, n-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x \geq X_{(n)}} \end{cases}$$

Un tipo de estadísticas FDE, de la clase cuadrática, son de la familia:

$$\boldsymbol{Q = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \psi(x) dF(x)}$$

Donde $\boldsymbol{\psi(x)}$ es una función conveniente, de esta salen los pesos de la diferencia cuadrática $\boldsymbol{[F_n(x) - F(x)]^2}$. Cuando $\boldsymbol{\psi(x) = 1}$, se trata de la estadística de Cramér-von Mises, y cuando $\boldsymbol{\psi(x) = \{[F(x)][1 - F(x)]\}^{-1}}$, se muestra nuestra estadistica de Anderson-Darling. (Carmona & Carrion, 2015).

Teniendo esto en cuenta el estadistico de la prueba se define como:

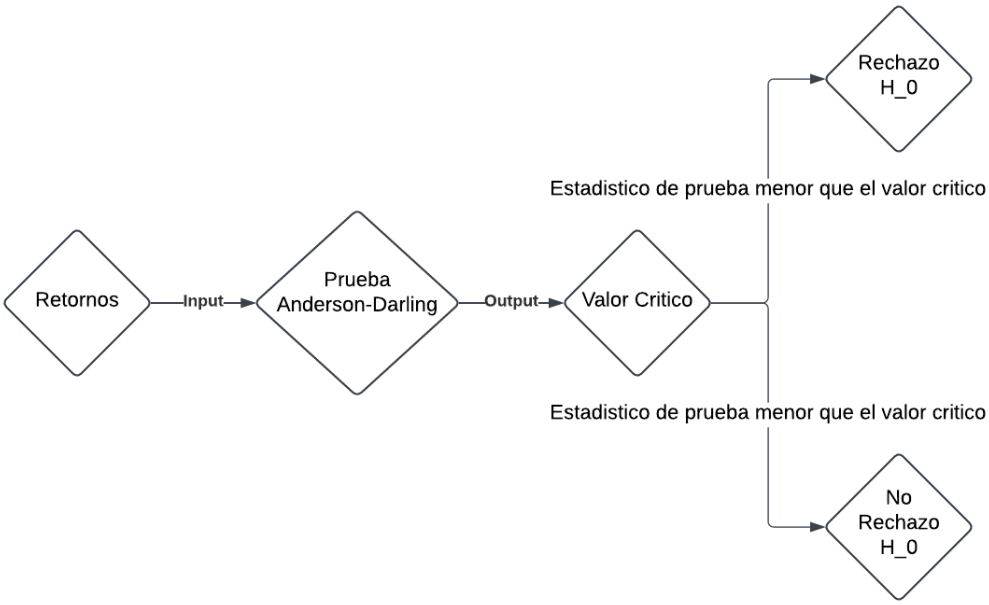
$$\boldsymbol{A = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 \psi[F^*(x)] dF^*(x)}$$

Debido a que $\boldsymbol{\psi}$ es una función no negativa, que se calcula mediante $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\{[F(x)][1 - F(x)]\}^{-1}}$.

En este trabajo utilizara el lenguaje de programación Python para hacer el test de normalidad a los activos de renta variable que se tienen en el trabajo como se muestra en la Figura 7

Figura 7.

Test Anderson-Darling



Nota. En la figura se muestra a través de un flujograma como se programó la prueba Anderson-Darling.

1.1.7. Teoría de los Mercados Eficientes

Eugene Fama (1970) es ampliamente reconocido por la comunidad académica como el fundador de la teoría de los mercados eficientes, una contribución fundamental al campo de las finanzas modernas. Su teoría propone que un mercado es "informacionalmente eficiente" cuando cumple ciertas condiciones específicas. En esencia, Fama sostiene que los precios de los activos financieros incorporan y reflejan instantáneamente toda la información disponible, ajustándose de manera inmediata y precisa ante cualquier nueva información que emerge en el mercado. Este planteamiento sugiere que los precios representan en todo momento el valor real de los activos, basándose en el conjunto total de datos e información accesible a los participantes del mercado.

Este también recalca que los precios de los activos refleja el valor que debe tener en ese momento la empresa, por este motivo la teoría dice que no es posible obtener una

ganancia superior a la que propone el mercado en promedia a largo plazo (Fama & Blume, 1966).

Fama y Blume realizaron en 1966 un estudio significativo sobre las reglas de filtro y la dinámica del mercado de valores. En su investigación, los autores reconocieron que los valores de los activos pueden experimentar anormalidades a corto plazo debido a diversas circunstancias del mercado. Específicamente, destacaron que durante estos breves períodos, los inversores podrían obtener rendimientos superiores al promedio esperado. No obstante, subrayaron la naturaleza impredecible de estas variaciones a corto plazo y que obtener un rendimiento monstruoso no es muy común y se debe al azar.

En la teoría, dice que si un mercado es eficiente la nueva informacion no puede ser predicha, dado que si no es así se tomaría como informacion actual y se formaría un fenómeno conocido como caminata aleatoria, ya que si las alteraciones de los valores de las empresas reflejaran algo impredecible se volvería algo totalmente aleatorio. (Malkiel, 1973)

En la teoría, se dice que, un mercado verdaderamente eficiente implica que la nueva información no puede ser predicha de antemano. Si fuera posible anticipar los cambios, estos dejarían de ser considerados información futura y pasarían a incorporarse inmediatamente al valor actual. Este fenómeno se conoce como "caminata aleatoria", donde las fluctuaciones de los valores de las empresas se tornan completamente impredecibles. La aleatoriedad surge precisamente porque cualquier información potencialmente reveladora se integra instantáneamente en los precios, eliminando cualquier posibilidad de ventaja predictiva para los inversores.

En respaldo a sus teorías sobre la eficiencia de los mercados, Fama (1970) y Malkiel (1973) coinciden en una recomendación práctica para los inversores. Ambos académicos sugieren que la estrategia más prudente consiste en invertir en fondos indexados, en lugar de intentar seleccionar valores individuales con potencial de alta rentabilidad. Esta recomendación se fundamenta en su planteamiento central: dado que los mercados incorporan rápidamente toda la información disponible, resulta extremadamente difícil

para un inversor individual superar consistentemente el rendimiento promedio del mercado mediante la selección selectiva de acciones.

Esto se refleja en la vida real con el notable crecimiento de estrategias pasivas de inversión (fondos indexados), resaltando los trabajos que dicen que no es posible obtener ganancias superiores al promedio en el largo plazo.

Fama (1970) introduce el concepto de "eficiencia informacional" para describir un fenómeno complejo en los mercados financieros. Según su planteamiento, un mercado con esta característica experimenta fluctuaciones que pueden parecer irracionales, donde los movimientos son fundamentalmente impredecibles. El autor enfatiza que, incluso durante eventos catastróficos en los mercados, resulta imposible determinar con antelación el momento exacto de su ocurrencia. Esta definición subraya la naturaleza aleatoria y dinámica de los mercados financieros, donde la información disponible se integra de manera instantánea, generando una volatilidad que desafía cualquier intento de predicción precisa.

A continuación se nombran algunos fenómenos irregulares en los mercados que respaldan lo dicho anteriormente:

- Efecto del fin de semana: Da una tendencia a la baja de los precios después del fin de semana especialmente el día lunes (French, 1980).
- Efecto enero: Las personas por lo general tienden a vender sus acciones en diciembre por diferentes factores y en enero las vuelven a comprar (Ritter, 1988).
- Efecto tamaño: Las empresas pequeñas o de menor valor total en el mercado tienden a dar mayores rendimientos que las compañías más grandes (Banz, 1981).

a. Hipótesis de Eficiencia de los Mercados

Según el trabajo de Fama (1970), dice que si un mercado es eficiente, los precios de los títulos reflejan toda la informacion disponible en el momento, esto quiere especificar que están correctamente valorados según sus condiciones y la relación entre su rendimiento y riesgo que hay al invertir en ellos.

Con esto Fama (1970) considera que hay algunos elementos que no son primordiales para considerar la eficiencia de un mercado, como son los costos de transacción, ya que

al existir este limita la cantidad de operaciones que se manejan, pero esto no necesariamente significa que los precios dejen de reflejar la informacion disponible. Otro puede ser la libre disposición de la informacion del mercado, en este caso se limita la informacion al público general, pero no evita que los precios muestre la informacion correcta y concisa del activo.

Según el trabajo de Roberts (1967) define que hay tres niveles de eficiencia en el mercado en funcion a la incorporación de la informacion rápidamente, como se definirán a continuación:

b. Hipótesis de Eficiencia Débil.

En la hipótesis de eficiencia débil, los precios de los títulos únicamente reflejan la información histórica disponible. Esta formulación teórica conduce a una conclusión fundamental: ningún inversor puede obtener rendimientos extraordinarios o superiores al promedio del mercado. La característica distintiva de este nivel de eficiencia radica en que el análisis de datos históricos carece de relevancia predictiva, eliminando cualquier posibilidad de generar beneficios adicionales mediante el estudio de tendencias pasadas.

c. Hipótesis de Eficiencia Semi-fuerte.

La hipótesis de eficiencia media o semifuerte sostiene que los precios de los valores incorporan de manera instantánea toda la información histórica y pública disponible en un momento determinado. Esta formulación teórica establece que ningún inversor puede obtener ganancias superiores al promedio del mercado, ya que los precios reflejan exhaustivamente un amplio espectro de información, incluyendo series históricas, estados financieros, proyecciones macroeconómicas y cualquier otro dato relevante de dominio público.

d. Hipótesis de Eficiencia Fuerte.

La hipótesis de eficiencia fuerte plantea que los precios de los valores reflejan de manera exhaustiva toda la información existente, abarcando datos históricos, información pública y privada. Esta formulación teórica sostiene que ningún inversor puede superar sistemáticamente los rendimientos promedio del mercado. La premisa fundamental es que todos los participantes del mercado operan en condiciones de absoluta igualdad, eliminando cualquier posibilidad de ventaja competitiva. Cualquier rendimiento superior

al promedio se consideraría meramente producto del azar, ya que no existe la posibilidad de acceder a información privilegiada que no esté inmediatamente incorporada en los precios.

La teoría de los mercados eficientes establece fundamentos cruciales para la teoría de portafolios, sustentada en la premisa fundamental de la impredecibilidad del mercado. Esta perspectiva teórica conduce a la necesidad de realizar una evaluación meticulosa de los activos, considerando de manera integral su rendimiento y riesgo específico. La conclusión central radica en que, durante periodos de corto plazo, los activos financieros presentan una probabilidad equiparable de experimentar variaciones al alza o a la baja, siendo estos movimientos únicamente determinados por la información disponible en un momento específico. Tal planteamiento resalta la naturaleza aleatoria de los mercados financieros y la importancia de fundamentar las decisiones de inversión en un análisis comprehensivo de los elementos que pueden influir en el comportamiento de los activos.

1.1.8. Teoría de portafolios

Esta teoría tiene como referencia a la publicación de Markowitz (1952), que se enfoca en la diversificación y la evaluación exhaustiva de los activos en su relación entre rentabilidad y riesgo, para obtener ganancias en el proceso, la diversificación de una mayor estabilidad al invertir en el mercado de valores, dado que cuando diversificamos se reduce significativamente la volatilidad del mercado al solo invertir en un solo título, también esta teoría da a los inversores mayor informacion para tomar decisiones estratégicas, esto es posible ya que es una teoría basada en datos (Cardenas, 2024).

a. Fundamentos

Un portafolio de inversión representa una estrategia financiera meticulosamente estructurada que constituye una herramienta fundamental para los inversionistas. Se define como un conjunto diversificado de activos financieros seleccionados y agrupados de manera deliberada por un inversor, con el propósito dual de maximizar los potenciales rendimientos y minimizar los riesgos inherentes al mercado de valores.

La construcción de un portafolio trasciende la simple acumulación de títulos valores; implica una selección estratégica que responde a objetivos específicos de inversión. Cada activo integrado al portafolio cumple una función particular dentro de una

arquitectura financiera diseñada para equilibrar la exposición al riesgo y aprovechar las oportunidades de crecimiento económico.

Al considerar la importancia de la construcción de un portafolio, los inversores realizan un análisis meticuloso que abarca múltiples dimensiones financieras. Específicamente, evalúan de manera exhaustiva los rendimientos históricos de los títulos, estudiando su comportamiento pasado, la volatilidad inherente y las correlaciones existentes entre los diferentes activos.

El objetivo fundamental de este análisis pormenorizado consiste en lograr una asignación óptima de capital, determinando con precisión la proporción que debe destinarse a cada instrumento financiero. Esta estrategia busca distribuir los recursos de manera que se maximicen las potenciales ganancias mientras se minimiza la exposición al riesgo, atendiendo específicamente a las aspiraciones y tolerancia al riesgo del inversor.

Harry Markowitz, considerado un pionero en la teoría moderna de portafolios, presentó en 1950 su revolucionaria investigación titulada "Portfolio Selection", un trabajo que transformaría fundamentalmente la comprensión de las estrategias de inversión. En esta publicación seminal, Markowitz demostró científicamente los beneficios de la diversificación como mecanismo para reducir el riesgo en las inversiones, desafiando los paradigmas tradicionales de la gestión financiera.

Su investigación introdujo el innovador modelo media-varianza, una herramienta analítica que permite a los inversores construir portafolios eficientes mediante el equilibrio sistemático entre rendimiento esperado y riesgo asociado. Este modelo representó un avance conceptual significativo, proporcionando un marco matemático riguroso para la toma de decisiones de inversión.

El impacto de su trabajo fue tal que la comunidad académica y financiera internacional lo reconoció ampliamente. En 1990, Markowitz recibió el Premio Nobel de Economía, galardón que ratificó su contribución fundamental a la teoría económica moderna y su transformación del entendimiento sobre la gestión de inversiones y análisis de riesgos financieros (Arévalo Useche, 2015).

Otros trabajos a recalcar son los de William Sharpe, John Lintner y Jan Mosiin, estos personajes mencionados, se basaron en el trabajo de Markowitz para hacer contribuciones significativas, como en la creación del modelo de valoración de activos financieros (CAPM), este permite calcular una tasa de retorno de un activo de renta variable, utilizando en ecuación lineal que agrega una tasa libre de riesgo y también agrega una prima de riesgo dada por la sensibilidad del titulo al comportamiento en el mercado (Arévalo Useche, 2015).

Otro trabajo a destacar, es el de William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin desarrollaron contribuciones fundamentales que expandieron significativamente la teoría de portafolios iniciada por Markowitz. Estos académicos construyeron sobre los cimientos establecidos por su predecesor para elaborar el modelo de valoración de activos financieros (CAPM), una herramienta revolucionaria en el análisis de inversiones. (Arévalo Useche, 2015)

El CAPM representa un avance metodológico que permite calcular la tasa de retorno esperada para un activo de renta variable mediante una ecuación lineal sofisticada. La estructura del modelo integra dos componentes esenciales: una tasa libre de riesgo y una prima de riesgo determinada por la sensibilidad específica del título ante las fluctuaciones generales del mercado.

Esta innovación teórica proporciona a los inversores un método sistemático para evaluar el rendimiento potencial de un activo, considerando tanto su estabilidad inherente como su comportamiento relativo en el contexto de mercado. La contribución de Sharpe, Lintner y Mossin amplió significativamente la comprensión cuantitativa de la relación entre riesgo y rendimiento en los mercados financieros, consolidando un enfoque más riguroso para la toma de decisiones de inversión.

b. Retorno o Rendimiento

El rendimiento de un activo financiero es la ganancia o pérdida generada por una inversión durante un período específico, expresada generalmente como un porcentaje. Este representa la rentabilidad obtenida por el inversor como resultado de su inversión en un instrumento financiero, el cual se calcula con la siguiente ecuación.

$$\mathrm{R_i} = \frac{\Delta\, Valor}{Valor\ inicial} = \frac{Valor\ final - Valor\ inicial}{Valor\ inicial}$$

También hay otra forma para calcular el rendimiento que es de la forma logarítmica con (P_t) como los precios del activo la formula muestra cómo se calcula este método:

$$R_i = Ln\left(\frac{P_t}{P_t - 1}\right)$$

El rendimiento de un portafolio se define como la sumatoria entre el peso que compone cada uno de los activos (W_i) y la rentabilidad promedio de cada uno de los activos (R_i), la ecuación muestra cómo se calcula:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} W_i * R_i$$

c. Volatilidad

La volatilidad se configura como un indicador estadístico fundamental que cuantifica el grado de riesgo asociado a un portafolio. Este parámetro permite a los inversores comprender la variabilidad potencial de los rendimientos de una inversión, revelando la magnitud de las oscilaciones que pueden experimentar los precios de los activos durante un período específico.

La significancia de la volatilidad radica en su capacidad para proporcionar información crítica que se adapta a diferentes perfiles de inversionistas. Un inversor con alta tolerancia al riesgo podría interpretar una volatilidad elevada como una oportunidad de obtener mayores rendimientos, mientras que un inversor conservador preferirá portafolios con baja volatilidad que garanticen una mayor estabilidad y previsibilidad en sus inversiones.

La interpretación de la volatilidad no es uniforme, sino que depende directamente de los objetivos financieros, horizonte temporal de inversión y perfil de riesgo particular de cada inversor. Por consiguiente, representa una herramienta de análisis multidimensional que trasciende la simple medición numérica, constituyéndose en un elemento estratégico fundamental para la toma de decisiones de inversión.

d. Covarianza y Correlación

En un portafolio es importante medir que sus activos tengan interrelaciones entre si ya sea que vayan en el mismo sentido o no, por este motivo se utilizan las estadísticas de covarianza y correlacion para medir estas tendencias.

Por lo dicho anteriormente se define la covarianza que está definida por la siguiente ecuación:

$$\text{Covarianza}(X, Y) = \frac{\sum(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{n}$$

La covarianza se interpreta de la siguiente manera: cuando dos variables aleatorias se mueven en la misma dirección, se dice que tienen una covarianza positiva. Por otro lado, si las dos variables aleatorias se desplazan en direcciones opuestas, esto indica una covarianza negativa.

Teniendo en cuenta lo anterior, la covarianza presenta una limitación: su interpretación no va más allá de cómo se mueven las variables. Este problema se soluciona con el coeficiente de correlación, cuyo cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$Coeficiente\ de\ Correlación = \rho = \frac{covarianza(x, y)}{\sigma x * \sigma y}$$

El resultado de la correlacion se puede interpretar mejor ya que es un valor entre -1 y 1, a diferencia de la covarianza, no solo indica la dirección en la que se mueven las variables, sino también la fuerza y el grado de la relación lineal entre ellas.

e. Desviación Estándar del Portafolio

Según Markowitz (1952), destaca que la desviación del portafolio no se calcula únicamente con las desviaciones individuales de cada título. También incluye la correlación de los títulos seleccionados. Por lo tanto, su cálculo se basa en los pesos de cada activo, la desviación de cada uno y su respectiva correlación.

La fórmula que se va a presentar representa el cálculo de la desviación del portafolio para dos activos:

$$Desviacion\ Estandar\ Portafolio = \sqrt{W_a^2 * \sigma_a^2 + W_b^2 * \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_a \sigma_b}$$

f. Medidas de eficiencia

Estas medidas son utilizadas para hacer una comparación entre portafolios tomando como criterios la rentabilidad y el riesgo que lo compone a cada portafolio que se quiere comparar, en este trabajo se va a utilizar la razón de Sharpe para realizar las respectivas comparaciones.

La razón de Sharpe divide la rentabilidad anormal de la cartera media durante un período de tiempo por la desviación estándar de la rentabilidad durante ese período, su cálculo es el siguiente:

$$Ratio\ Sharpe = \frac{E(R_p - R_f)}{\sigma_p}$$

Donde $\mathrm{R_p}$ es el rendimiento del portafolio, R_f es rentabilidad del activo libre de riesgo y σ_p es la desviación estándar del portafolio.

g. Modelo de valoración de activos financieros (CAPM)

Este modelo representa un constructo teórico fundamental en la ciencia financiera que explora la relación intrínseca entre el riesgo sistemático de un activo y su rendimiento esperado. Esta aproximación teórica establece un vínculo analítico que permite determinar la rentabilidad potencial de un título financiero en función de su exposición al riesgo de mercado.

La premisa central del modelo sostiene que los inversores demandan una compensación específica por asumir riesgos, considerando tanto la incertidumbre inherente al activo como el costo de oportunidad asociado a la inversión. Dicha compensación se fundamenta en la idea de que todo inversor requiere una retribución adicional por apartarse de una inversión considerada libre de riesgo.

El modelo CAPM se configura como una herramienta sofisticada que permite cuantificar el rendimiento esperado, considerando múltiples variables financieras y el comportamiento sistémico del mercado. Su formulación teórica proporciona a los inversores un marco analítico para evaluar la relación entre riesgo y potencial de

ganancia, facilitando decisiones de inversión más informadas y estratégicas. Su cálculo se define de la siguiente manera:

$$E(R_i) = R_o + E(R^*) - R_o * \beta_i$$

Donde: $E(R_i)$ es la rentabilidad esperada del título i que se está midiendo, R_o es la rentabilidad del respectivo título i libre de riesgo, $E(R^*)$ es la rentabilidad esperada del mercado de donde pertenezca el activo, por ejemplo el S&P500 para las principales 500 acciones de estados unidos y β_i es le beta del respectivo título i.

El riesgo sistemático es el único riesgo que no se puede suprimir por la diversificación, para medirlo se utiliza el beta β, esta mide el grado de relación que se tienen entre la rentabilidad del mercado y la del respectivo título i. Este se calcula de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{COV(R_i * R)}{VAR(R^*)}$$

h. La Frontera Eficiente

La frontera eficiente constituye un concepto fundamental en la teoría moderna de portafolios que representa un conjunto de combinaciones óptimas de inversión. Este constructo teórico se compone por todas las posibles configuraciones de portafolio que ofrecen el máximo rendimiento esperado para un nivel específico de riesgo, o alternativamente, el mínimo riesgo para un rendimiento determinado.

Su elaboración surge de la modificación sistemática de los pesos asignados a los diferentes activos que integran el portafolio. Mediante un proceso de optimización matemática, los inversores pueden identificar aquellas combinaciones que representan el equilibrio más eficiente entre rentabilidad esperada y desviación estándar.

La frontera eficiente no solo representa un conjunto de opciones de inversión, sino que se configura como una herramienta analítica que permite a los inversionistas visualizar y seleccionar estratégicamente la composición de sus portafolios. Cada punto en esta frontera representa una solución única que maximiza la eficiencia de la inversión, atendiendo a los objetivos específicos y la tolerancia al riesgo de cada inversor.

i. Selección del portafolio

La selección de un portafolio de inversión se estructura mediante un proceso metodológico dividido en dos etapas fundamentales, cada una con un propósito analítico específico.

En la primera etapa, los inversores realizan un análisis exhaustivo de los títulos valores, examinando meticulosamente sus comportamientos históricos. Este estudio comprende un análisis retrospectivo detallado que incluye variables como rendimientos previos, volatilidad, correlaciones y desempeño en diferentes contextos económicos. La experiencia y el conocimiento del inversor juegan un papel crucial en esta fase, permitiéndole interpretar los datos históricos y elaborar proyecciones fundamentadas sobre el potencial comportamiento futuro de los instrumentos financieros.

La segunda etapa consiste en la selección estratégica de los títulos, basándose directamente en las conclusiones derivadas del análisis preliminar. En este punto, el inversor utiliza la información recopilada para identificar aquellos activos que mejor se alinean con sus objetivos de inversión, perfil de riesgo y expectativas de rendimiento. La decisión implica un proceso de evaluación comparativa que considera no solo el desempeño individual de cada título, sino también su potencial contribución a la eficiencia global del portafolio.

Teniendo en cuenta lo dicho anteriormente, se establece que, la construcción de un portafolio de inversión requiere un proceso meticuloso que trasciende la simple selección de títulos. El objetivo primordial consiste en configurar una combinación de instrumentos financieros que minimice el riesgo y maximice las rentabilidades potenciales.

La metodología implica, inicialmente, un estudio exhaustivo para identificar aquellos títulos que ofrezcan las mejores características de desempeño. Este análisis comprende una evaluación detallada de múltiples variables financieras, buscando instrumentos que contribuyan de manera óptima a la eficiencia del portafolio.

Una vez seleccionados los títulos, el proceso avanza hacia una fase crucial: la asignación de pesos específicos dentro del portafolio. Esta distribución no es aleatoria, sino que se fundamenta en un análisis riguroso de factores determinantes como: liquidez,

rentabilidad y riesgo. La ponderación de estos elementos permite al inversor crear una estructura de portafolio que equilibra de manera estratégica los objetivos de crecimiento y protección patrimonial, adaptándose a su perfil específico de inversión.

1.1.9. Modelos de Optimización de Portafolios

Estos modelos permiten a los inversores evaluar y seleccionar las combinaciones de títulos financieros que maximicen el rendimiento con la mínima varianza posible. Para ello, utilizan datos históricos de los títulos seleccionados y técnicas estadísticas avanzadas, así como modelos que identifican tendencias, relaciones y comportamientos entre diferentes títulos, ajustándolos según su volatilidad y correlación (Bernal, 2013).

En conclusión, los modelos de optimización de portafolios se configuran como herramientas estratégicas fundamentales que trascienden la simple mitigación de riesgos. Estos instrumentos analíticos proporcionan a los inversores un marco metodológico sofisticado para comprender y anticipar la dinámica de los mercados financieros.

Más allá de prevenir posibles fluctuaciones en las inversiones, estos modelos ofrecen un análisis estadístico riguroso que permite a los inversionistas adaptar sus estrategias de manera proactiva ante los cambios del entorno económico.

a. Modelo de Markowitz o Media-Varianza

El modelo que publico Markowitz en 1952 llamado el modelo de Media-Varianza, tiene como objetivo encontrar un portafolio que maximice la rentabilidad a la mínima varianza posible. Este se compone de las expectativas de rentabilidad de cada título del portafolio, la rentabilidad media de cada título, las varianzas y sus respectivas covarianzas. la optimización del modelo se presentara a continuación: siendo $S1, S2, \dots, Sn$ los títulos del portafolio, R_i es el retorno del título i, σ_i es la desviación estándar del título i, ρ_{ij} es el coeficiente de correlación de los retornos de los títulos S_i y $S_j$seleccionados del portafolio, w_i es el peso que esta invertido en el titulo i, $W = [w_1, \dots, w_n]$ es el vector de pesos de cada título en el portafolio, σ_p^2 es la varianza del portafolio, σ_M^2 es la varianza del mercado en que se encuentra el portafolio, R_p es el retorno del portafolio, R_M es el retorno del mercado en que se encuentra el portafolio, R_f es la tasa libre de riesgo, R es el vector de

retornos esperados de los títulos, δ es el parámetro de aversión al riesgo y por ultimo $\Sigma = \sigma_{ij}$ es la matriz de Covarianzas con $\sigma_{ii} = \sigma^2$ y $\sigma_{ij} = \rho_{ij} * \sigma_i * \sigma_j$ (Bernal, 2013).

Una vez explicada toda la notación necesaria para entender el modelo, el retorno del portafolio y la varianza se calculan de la siguiente manera, suponiendo que la matriz $W = [w_1, \ldots\ldots w_n]$ es la matriz de pesos que ya está dada en el modelo (Bernal, 2013).

$$E[R] = R_1 w_1 + \cdots + R_n w_n = \boldsymbol{R'w}$$

$$Var[w] = \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j W_i W_j = W'^{\Sigma W}$$

Para calcular los posibles portafolios, hay que resolver uno de los dos problemas de optimización que se indican a continuación:

$Min_W\ \boldsymbol{W^T}\ \sum \boldsymbol{W}$

$$s.a$$

$$\boldsymbol{W^T R = R_p}$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=i}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w = 1}$$

$$O$$

$Max_W \boldsymbol{W^T\ R}$

$$s.a$$

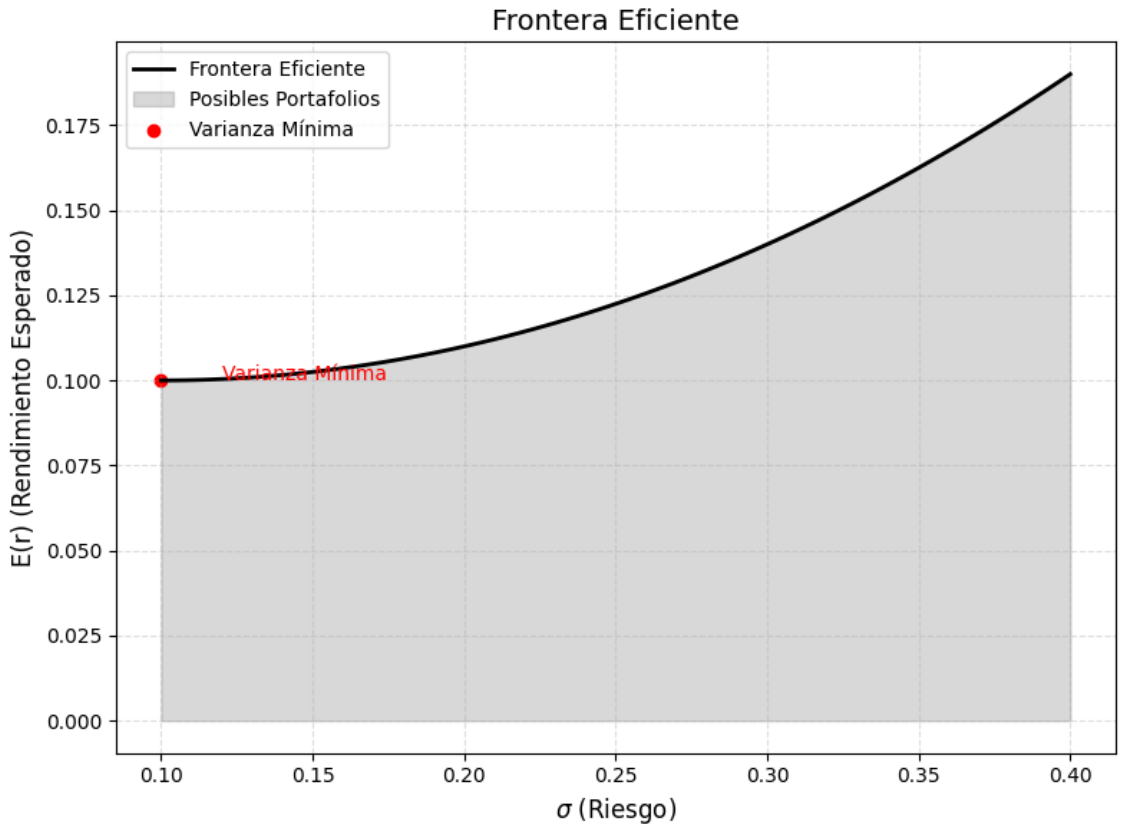
$$\boldsymbol{W^T \sum W = \sigma_P^2}$$

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w = 1}$$

Ya teniendo la minimización de la varianza o la maximización del rendimiento dado un respectivo nivel de riesgo se obtienen todas las posibles combinaciones en la relación entre rendimiento y riesgo (Bernal, 2013).

Figura 8.

Frontera Eficiente



Nota. En la se muestra una demostración de la frontera eficiente de la manera grafica.

La frontera eficiente emerge del proceso de minimización de la varianza para un nivel específico de rentabilidad. Este principio fundamental permite a los inversores identificar combinaciones de activos que optimizan la relación entre riesgo y rendimiento.

El criterio de selección del portafolio más óptimo se fundamenta en la razón de Sharpe, un indicador estadístico que mide el rendimiento ajustado por riesgo. Esta métrica proporciona una evaluación precisa de la eficiencia de la inversión, calculando el exceso de rendimiento obtenido por unidad de riesgo asumido.

La razón de Sharpe permite a los inversores comparar diferentes estrategias de inversión de manera objetiva, considerando no solo la rentabilidad potencial, sino también la volatilidad asociada. Un valor más alto de este indicador sugiere un portafolio que ofrece

el mejor equilibrio entre rendimiento y riesgo, constituyéndose como la opción más eficiente para los inversionistas que buscan maximizar su retorno mientras minimizan la exposición a la volatilidad del mercado.

b. Criticas Al Modelo De Media-Varianza

El modelo de Markowitz ha recibido numerosos elogios por su contribución a la teoría moderna de portafolios, y en 1990 fue galardonado con el premio Nobel de Economía. Sin embargo, el modelo ha sido objeto de algunas críticas, que se mostrarán a continuación:

- Según Mankert (2006) el modelo de Makowitz no se tiene en cuenta las capitalizacion de los mecados, lo que puede implicar que un titulo de con poca capitalizacion bursatil y rentabilidad lo bastantemente alta, se concentrara en este tipo de titulos
- Según Black & Litterman (1992) el modelo no contenplan estimaciones correctas de sus rentabilidades esperadas ni de sus covarianzas, por lo que afirman que estos pueden maximizar los errores del modelo.
- Según Michaud (1989) el modelo utilaza los datos hitoricos para producir medias muestrales utilizandolas como rendimientos esperados en el modelo.
- De acuerdo con Michaud (1989), el modelo de Markowitz es inestable, ya que cualquier fluctuación de los valores de este da cambios significativos en las ponderaciones dadas por el modelo.
- Según Black & Litterman (1992) el modelo produce asignaciones no racionales en los pesos de los titulos que en la vida real una entidad financiera no aceptaria.

c. Selección De Portafolios Desde Un Enfoque Bayesiano: Black-Litterman

El modelo Black-Litterman, desarrollado por Fisher Black y Robert Litterman, fue publicado en 1992 en la revista "Financial Analyst Journal" con el título "Global Portfolio Optimization". Esta propuesta representó una innovación significativa en el campo de la teoría de portafolio, presentando una alternativa metodológica al modelo de media-varianza de Markowitz. (Bernal, 2013)

El modelo abordó una de las principales críticas al enfoque de Markowitz, proponiendo una nueva metodología para estimar los retornos esperados de los títulos. Su

contribución principal radica en introducir un marco más flexible y robusto para la construcción de portafolios de inversión, permitiendo a los inversores incorporar sus expectativas y percepciones del mercado de una manera más intuitiva y precisa.

La publicación de Black y Litterman marcó un punto de inflexión en la teoría moderna de portafolio, ofreciendo una herramienta más sofisticada para la toma de decisiones de inversión.

A continuación se presentaran los fundamentos y la notación del modelo Black-Litterman que es fundamental para el desarrollo de este trabajo.

d. Estadistica Bayesiana

La estadística bayesiana se presenta como un enfoque alternativo al análisis estadístico tradicional, desafiando los métodos convencionales de la inferencia estadística. En el contexto del modelo Black-Litterman, esta metodología resulta fundamental, ya que permite incorporar probabilidades subjetivas de manera estructurada en la construcción de portafolios de inversión.

A diferencia de los enfoques estadísticos clásicos, la estadística bayesiana ofrece un marco flexible para integrar conocimientos previos y nueva información, lo que resulta especialmente valioso en la modelación financiera. En el modelo Black-Litterman, este enfoque permite a los inversores traducir sus percepciones y expectativas del mercado en distribuciones de probabilidad más refinadas y personalizadas.

La estadistica bayesiana tiene como base el teorema de bayes, que se modela de la siguiente forma:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Sabiendo que: $P(A)$ es la probabilidad de que suceda un evento A, $P(B)$ es la probabilidad de que suceda un evento B, $P(B|A)$ es la probabilidad de que suceda un evento B dado que ya sucedió un evento A y $P(A|B)$ es la probabilidad de que suceda un evento A dado que ya sucedió un evento B.

Según Lee (1997), la estadística bayesiana se fundamenta en un proceso metodológico que comprende varios elementos clave. En primer lugar, se selecciona una distribución que incorpora el conocimiento histórico, denominada "distribución a priori", la cual se aplica sobre los parámetros del modelo.

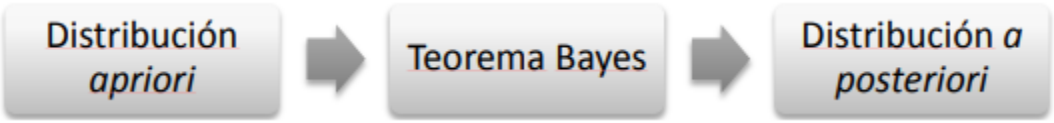
Posteriormente, los parámetros desconocidos se reemplazan utilizando la información contenida en la distribución a priori. Este procedimiento permite acotar las probabilidades de los datos observados, momento en el cual se aplica el teorema de Bayes para transformar la información.

Como resultado de este proceso, se genera una nueva distribución conocida como "distribución a posteriori", que representa una síntesis entre el conocimiento previo y la evidencia empírica observada. Esta metodología permite a los investigadores actualizar sus creencias iniciales a medida que se dispone de nueva información, proporcionando un marco más dinámico y adaptativo.

Todo este proceso se resume en la siguiente figura:

Figura 9.

Inferencia Bayesiana



Nota. En la figura se muestra como la inferencia bayesiana toma una distribucion a priori y con la teoría de bayes la transforma en una distribucion a posteriori. Tomado de: Castillo, M. (2015). Toma de Decisiones en las Empresas: entre el arte y la técnica: metodologías, modelos y herramientas. Bogota: Universidad de los Andes.

Teniendo esto en cuenta, se puede decir que la estadística bayesiana actualiza las asignaciones de probabilidad iniciales cuando se dispone de nueva información, lo que nos ofrece una nueva perspectiva teniendo en cuenta los dos puntos de vista. Según Castillo (2015), esto, aplicado a la teoría de portafolios, permite combinar información

histórica de los títulos con información de fuentes fiables sobre estos para generar una nueva distribución y tomar decisiones de inversión.

e. Modelo Black-Litterman

El modelo Black-Litterman tiene una peculiaridad que es permitir tomar como base el modelo de Markowitz y combinarlo con las perspectivas de los títulos que tenga el inversor a la hora de generar su portafolio. Su funcionamiento es muy similar al modelo Media-Varianza, dado que, una vez que se minimiza la varianza teniendo un nivel de riesgo ya establecido, se obtienen todas las combinaciones posibles en relación a rendimiento y riesgo, con esto se encuentran los pesos óptimos para los respectivos títulos del portafolio.

Este modelo utiliza estadística bayesiana. Normalmente, se parte de una distribución a priori o de un portafolio de referencia, que se calcula a partir de la teoría CAPM o de la estrategia de optimización elegida por el inversor. A continuación, se genera la distribución a posteriori en función de la distribución a priori elegida y de las expectativas de cada título que tenga el inversor en ese momento, dependiendo de la situación actual del mercado.

A continuación, se muestra el modelo Black-Litterman con la notación ya presentada en el modelo Media-Varianza:

f. Portafolio de Mercado

Se supone que la funcion de utilidad de un inversor es: $U = \boldsymbol{W^T R} - \boldsymbol{\delta W^T \sum W}$

$$s.a$$

$$\sum_{i=1}^{n} w = 1$$

Y también se supone que el inversor tiene como objetivo maximizar su utilidad, por lo que el problema de optimización se presenta como:

$Max_W\ \boldsymbol{W^T R} - \boldsymbol{\delta W^T \sum W}$

$$s.a$$

$$\sum_{i=1}^{n} w = 1$$

Para solucionar esto, se utilizan los multiplicadores de Lagrange, que permiten obtener la derivada parcial de la utilidad respecto a W, y luego igualarla a cero para obtener el peso óptimo del portafolio del mercado en el que se encuentra el nuestro. Para ello, se utiliza la capitalización bursátil del mercado en el que se encuentra el portafolio.

$$\frac{dU}{dW} = R - \delta \sum W = 0$$

Esto quiere decir que:

$$\boldsymbol{R = \delta \sum W}$$

Donde delta δ es el parámetro de aversión al riesgo, esto significa que es el exceso de rendimientos del mercado sobre la varianza del mercado, esta se calcula de la siguiente forma: $\delta = \frac{R_M - R_F}{\sigma_m^2}$, para seguir con la misma notación llamaremos a R "retornos de equilibrio" ($\prod$) (Bernal, 2013).

$$\prod = \boldsymbol{\delta \sum W}$$

Esta ecuación se interpreta como los rendimientos del mercado de capitales que hacen que este se encuentre en equilibrio, dicho de otra manera, estos igualan la oferta y la demanda de los títulos financieros a esto se le denomina como "portafolio de mercado" (Bernal, 2013)

g. Expectativas de Mercado: Views

Las rentabilidades esperadas del Black-Litterman se calculan en función del portafolio de mercado, en función de las observaciones de cada título que tenga el inversor. A estas observaciones se les llama "Views", y se modelan de la siguiente manera, la matriz Q es el vector de los views de los títulos y la matriz P es la asociación que se tiene con los views de cada título que se tenga (Bernal, 2013).

$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$ q_i representa cada view. Y la matriz $P = \begin{bmatrix} w_1^1 & \cdots & w_1^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_k^1 & \cdots & w_k^d \end{bmatrix}$ w_j^i representa el activo al cual pertenece el view.

Para facilitar la comprensión de estos conceptos, se dará un ejemplo: se tiene un portafolio con tres títulos: A, B y C, y estos tienen las siguientes proyecciones: el view 1 es que el título A tendrá una rentabilidad del 4 % el próximo mes, y el view 2 es que el título B tendrá una rentabilidad del 2 % más que el título C el próximo mes (Bernal, 2013).

Dado esto las Q y P se modelan como:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.02 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mirando las tanto el vector Q como la matriz P, se puede aclarar que las filas de Q representan las observaciones sobre los títulos A, B y C del próximo mes, y en la matriz P las filas representan la asociación de las observaciones que se tiene a cada uno de los títulos.

Cuando se habla de rendimientos esperados, se puede asociar a un riesgo relacionado con las posibles rentabilidades. Como las proyecciones de estas no son del todo fiables, se representan de la siguiente forma:

$$Q + \epsilon = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

El vector de errores representa las desviaciones respecto al view. Según Black & Litterman (1992), este vector presenta una distribucion normal con μ igual a cero y una varianza Ω que es la incertidumbre como se muetra a continuacion:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \sim N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} \\ w_{2,1} & w_{2,2} \end{bmatrix}$$

Omega Ω representa la incertidumbre y se calcula de la siguiente manera $\Omega = TP\sum P^T$. Por el contrario, su complemento Ω^{-1} equivale a la certeza de los views.

Según la investigación de He (1999) supone que el parámetro T equivale a 0.025 y representa el grado de incertidumbre de los views del inversionista.

h. Rentabilidades Esperadas

Ya se han explicado los dos elementos básicos del modelo Black-Litterman como son: el portafolio de mercado $\prod$ y los views Q. Cuando se establecen las opiniones del inversor sobre los títulos y se aplica el modelo, se obtienen las rentabilidades esperadas. Estas son una media ponderada de $\prod$ y Q, y esta se encuentra midiendo la confianza que se tiene sobre $\prod$ y Q. Se representa de la siguiente manera:

$$(\tau\sum)^{-1}\prod + P^T\Omega^{-1}Q$$

Siendo $(\tau\sum)^{-1}$la ponderación o confianza que se tiene sobre $\prod$ y $P^T\Omega^{-1}$ es la ponderación o confianza que se tiene sobre Q.

Recordando el problema de la optimización, la suma de las proporciones invertidas de cada título tiene que ser igual a uno, por lo que la ecuación presentada anteriormente se tiene que multiplicar por la siguiente:

$$((\tau\sum)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}$$

Teniendo en cuenta todo lo mencionado anteriormente, al aplicar el modelo Black-Litterman da como resultado una distribucion a posteriori que se resume en la siguiente ecuación:

$$E(R)_{B-L} = ((\tau\sum)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1} * (\tau\sum)^{-1}\prod + P^T\Omega^{-1}Q$$

Finalmente, como se mencionó anteriormente, este modelo solo difiere del modelo de Markowitz en las perspectivas de rentabilidad de los títulos. Teniendo esto en cuenta, se obtienen estas perspectivas con la fórmula del modelo Black-Litterman y se procede a optimizar el respectivo portafolio (Bernal, 2013).

2. METODOLOGIA

La metodología de esta tesis se centrará en la implementación del modelo Black-Litterman para la optimización de carteras y la comparación de portafolios con diferentes acciones. El proceso se desarrollará en el lenguaje de programación Python y constará de varias etapas.

En primer lugar, se obtendrán los datos de la plataforma especializada Yahoo Finance, donde se extraerán los precios de cierre diarios de varias acciones de renta variable de la Bolsa de Valores de Nueva York. A continuación, se calcularán los rendimientos de cada acción seleccionada. Estos datos serán sometidos a un análisis de distribución utilizando las pruebas de normalidad de Shapiro-Wilk y Anderson-Darling, con el fin de comprobar la teoría de los mercados eficientes, que servirá como punto de partida para el modelo.

Posteriormente, se seleccionarán 14 acciones aleatorias de una lista de las 20 acciones más valiosas del S&P500 y se crearán 10 portafolios diferentes. Para cada portafolio, se generarán las matrices de rendimientos y las matrices de covarianzas, necesarias para la implementación del modelo Black-Litterman.

Además, se calculará el vector de capitalización bursátil, que indica el valor de la compañía en función de su precio actual y el número de acciones en el mercado. También se determinará el parámetro de aversión al riesgo del mercado correspondiente, en este caso el S&P500. Con estos indicadores financieros, se construirá una distribución prior utilizando el modelo Black-Litterman.

El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) se aplicará a todos los activos para estimar su valoración considerando el riesgo asociado a cada uno. Con las covarianzas, se generarán las fronteras eficientes de cada portafolio y se determinarán los pesos de los activos que minimicen la volatilidad del portafolio. A partir de esto, se calcularán la métrica de Sharpe y el retorno estimado de cada portafolio.

Finalmente, se definirán las "views" para el modelo, las cuales se obtendrán principalmente del modelo CAPM, dado que es un modelo de expectativas y proporciona estimaciones útiles para este propósito. Con todas las etapas mencionadas, se

implementará una distribucion posteriori con el modelo Black-Litterman, incorporando los indicadores económicos previamente establecidos. Dependiendo de la métrica de Sharpe y la intuición del mercado, se seleccionará un portafolio que se recomendará a los inversores.

2.1. Implementación

Dada la informacion anterior, en esta seccion se dará una explicación más práctica de lo que el trabajo hizo con todos los elementos que se tenían a disposición:

2.1.1. Obtención de Datos

Se ejecuta el siguiente flujo para obtener los datos y su respectiva matriz de precios:

Figura 10.

Flujo de obtención de datos

Nota. En la figura muestra se muestra un flujograma de cómo se obtuvieron los datos de cierre de las 20 acciones.

Y aqui su matriz de precios con algunos datos actuales y empresas:

Tabla 11.

Matriz de Precios

Date	AAPL	ABBV	AMZN	BRK-B	CVX	GOOGL
2024-11-01	222.66	203.5500	197.9299	452.1400	153.0700	171.2899
2024-11-04	221.76	200.4700	195.7799	442.2900	153.9700	169.2400
2024-11-05	223.20	201.6799	199.5	445.0599	153.4100	169.7400
2024-11-06	222.47	201.1999	207.0899	468.8999	157.7200	176.5099

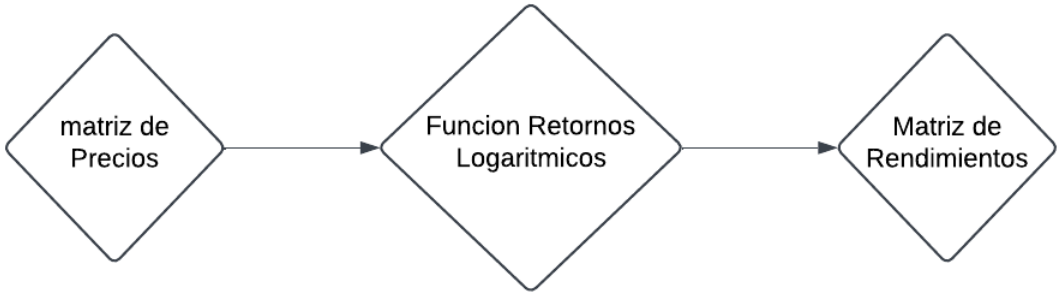
Nota. En la tabla se muestra la matriz de los precios de cierre de algunas acciones seleccionadas.

2.1.2. Matriz de rendimientos

Con la matriz de precios se calculan los rendimientos de forma logarítmica como se mostró en la parte teórica y aquí damos el flujo de la funcion en phyton:

Figura 11.

Obtención de la matriz de retornos



Nota. En la figura se muestra como se transformó la matriz de precios en la matriz de rendimientos con la funcion logarítmica.

Y aqui se da los retornos más actuales de algunas empresas:

Tabla 12.

Matriz de retornos

Date	AAPL	ABBV	AMZN	BRK-B	CVX	GOOGL
2024-11-05	0.00646	0.00601	0.0188226	0.0062433	-0.003643	0.0029500
2024-11-06	-0.0032	-0.0023	0.0373392	0.0521804	0.0277072	0.0391096
2024-11-07	0.02114	-0.0034	0.0141921	-0.018880	-0.006041	0.0237373
2024-11-08	-0.0011	-0.0050	-0.008942	0.0071031	0.0010200	-0.013366

Nota. En la tabla se muestra la matriz de rendimientos de algunas acciones seleccionadas.

2.1.3. Distribucion de los retornos

Teniendo todos los retornos de cada acción, individualmente se hace una distribucion de ellos para ver cuales tiene más frecuencia que otros históricamente, a continuación se mostrara el codigo con que se hizo el procedimiento en los retorno de Apple:

Figura 12.

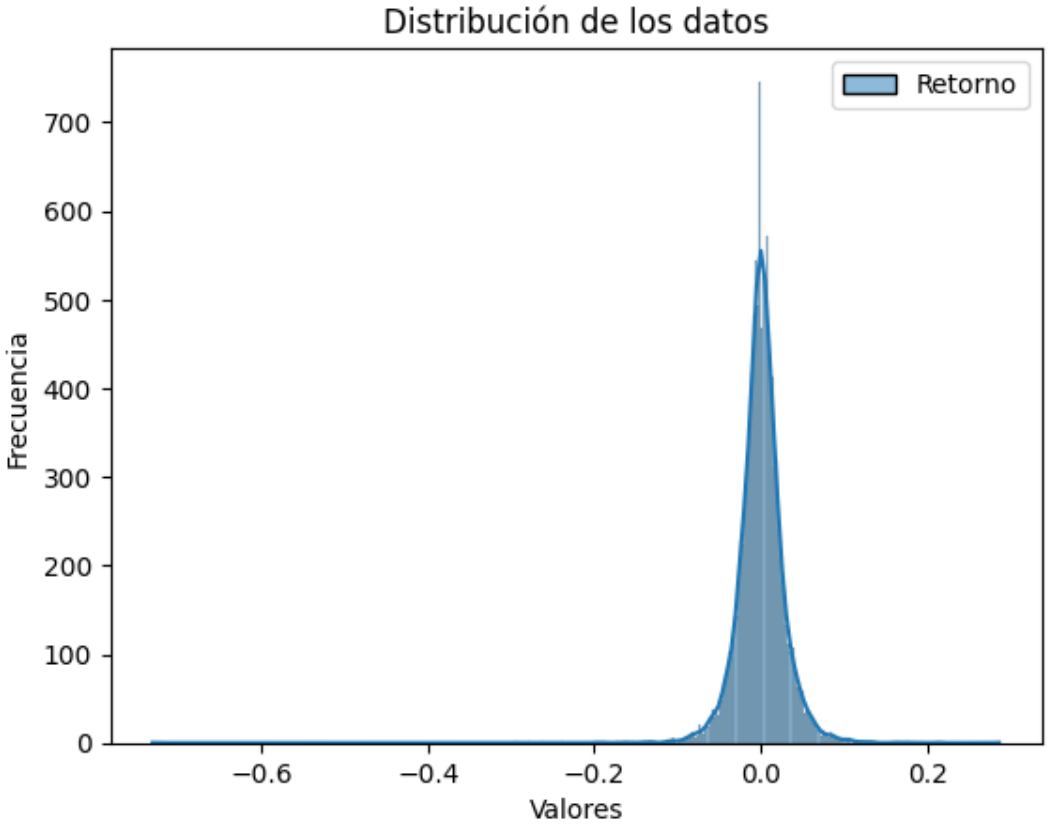
Codigo de la elaboración de la distribucion

Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se obtuvo la distribucion de los retornos.

Y de aquí el resultado del codigo con los retornos de Apple

Figura 13.

Distribucion de Retornos



Nota. En la figura se muestra como es la distribucion de los retornos de Apple.

2.1.4. Pruebas de Normalidad

Teniendo la distribucion de los retornos se quiere comprobar la teoría de los mercados eficientes que en resumen los retornos se distribuyen de manera aleatoria y en teoría no siguen una distribucion específica, entonces se darán dos pruebas para comprobar si los retornos siguen una distribucion normal, con el siguiente codigo se da a conocer las pruebas de Shapiro-Wilk y Anderson-Darling y se comprueba la distribucion de los retornos de Apple:

2.1.5. Prueba Shapiro-Wilk

El resultado de esta prueba fue de un p-valor $1.3294864406825 \cdot e^{-65}$, significa que se rechaza la hipótesis nula $\boldsymbol{H_0}$ que dice que los datos siguen una distribucion normal, el flujo que se siguió para obtener este resultado se muestra en la ilustración 6.

2.1.6. Prueba Anderson-Darling

Esta prueba a diferencia de la anterior, se utiliza la comparación del valor crítico y el estadistico de prueba, dado que si este es mayor que el valor crítico para un nivel de significancia dado, se rechaza la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución normal, en este caso se determinara el estadistico que dio: 145.127 y se comparo con el valor critico al 5% de significancia que dio: 0.787, teniendo esto en cuenta se rechaza la $\boldsymbol{H_0}$ donde los retornos no siguen una distribucion normal, el proceso que se siguió se muestra en la Figura 7.

En conclusión con los demás activos tienen la misma preferencia a no seguir una distribucion normal, comprobando que los activos que se tienen en cuenta en este trabajo, estando en desacuerdo que en la práctica no se sigue la teoría de los mercados eficientes, ya que se tienen más variables al respecto como preferencias humanas u sucesos que afectan el mercado y lo pueden llevar a sesgar el precio y en su defecto los retornos.

2.1.7. Creación de los 10 Portafolios

En esta seccion se muestra el codigo que se utilizó para crear los 10 portafolios con 14 activos cada uno seleccionados aleatoriamente de la lista principal de 20 activos del S&P500:

Figura 14.

Generador de las listas de los Portafolios

Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó la generación de los 10 portafolios a partir de las acciones principales.

Con estas nuevas listas de activos repetimos el proceso de sacar individualmente a cada lista su matriz de precios y retornos.

2.1.8. Matrices de Covarianzas

Se construyen las matrices de covarianzas entre los diferentes portafolios creados:

Figura 15.

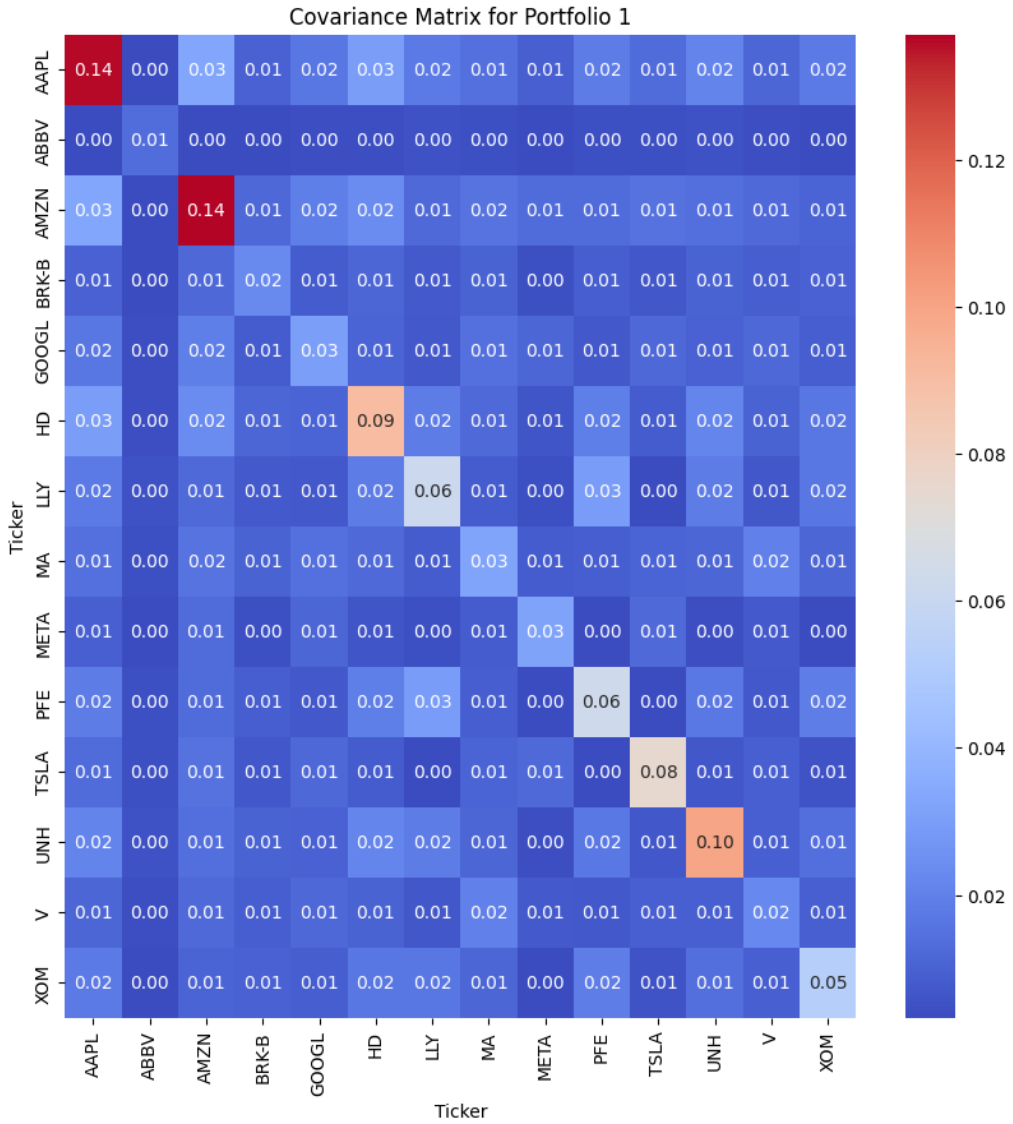
Generación de las Matrices de covarianza

Nota. En la figura se muestra un flujograma de como se programó a partir de los 10 portafolios sus respetivas matrices de precios y covarianzas.

Aqui se mostrara una matriz de covarianza elaborada con la primera lista de los 10 portafolios:

Figura 16.

Matriz de Covarianza



Nota. En la figura se muestra la matriz de covarianzas del primer portafolio creado mostrando las relaciones que tienen las acciones entre sí.

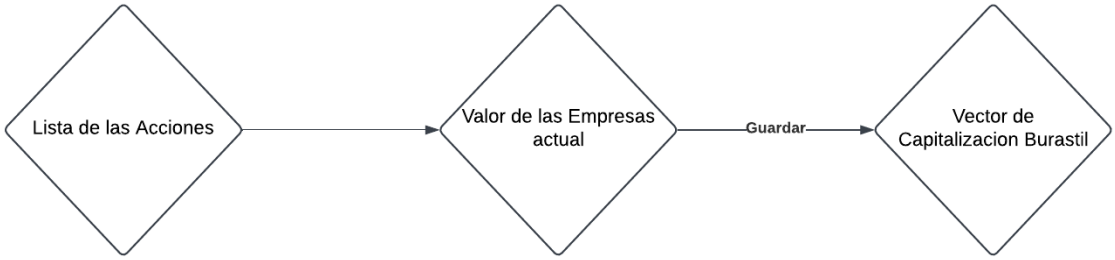
2.1.9. Vector porcentual de capitalización bursátil

Este vector tiene que calcular los precios de las acciones por la cantidad de acciones que tiene una compañía en el mercado, esto da unos determinados valoraciones a las

empresas y da pesos a las compañías dependiendo de su valoración total, esto se logra con el siguiente codigo:

Figura 17.

Generación de la capitalización Bursátil de las empresas



Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó para obtener los vectores de capitalización bursátil de cada portafolio.

Tabla 13.

Capitalización Bursátil del primer portafolio

APPLE	$3,389,415,751,680
AMAZON	$2,196,688,732,160
GOOGLE	$2,232,236,900,352
BERKSHIRE HATHAWAY	$1,005,064,880,128
META	$1,476,372,201,472
TESLA	$1,054,472,601,600
UNITEDHEALTH	$565,670,969,344
VISA	$601,632,669,696
EXXON MOBIL	$528,949,051,392
MASTERCARD	$485,688,606,720
HOME DEPOT	$400,376,528,896
PFIZER	$148,418,478,080
ELI LILLY	$777,356,836,864
ABBVIE	$302,339,981,312

Nota. En la tabla se muestra el vector de capitalización bursátil que tiene el portafolio 1 en el 30 de noviembre de 2024.

2.1.10. Parámetro de aversión al riesgo

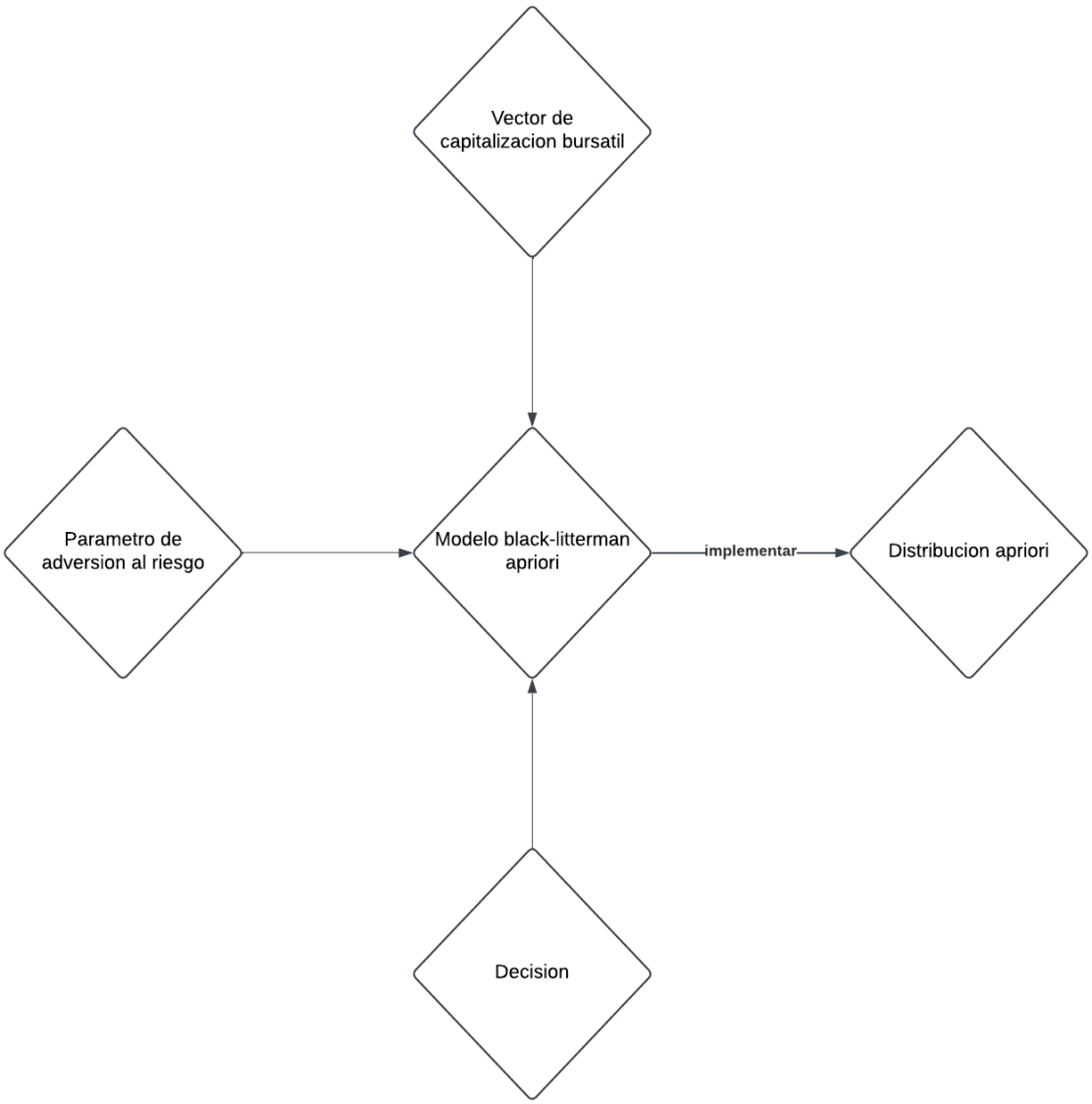
El Parámetro de Aversión al Riesgo mide la predisposición de una persona o un inversor a evitar el riesgo en sus decisiones financieras. Un valor de 1.62 indica que la persona tiene una aversión al riesgo moderada, lo que significa que buscará un balance entre riesgo y recompensa. Optará por estrategias que ofrezcan cierta seguridad sin sacrificar completamente las oportunidades de ganancia.

2.1.11. Distribucion Priori del modelo Black-Litterman

Con los tres apartados anteriores se construyó la distribucion a prior del modelo, con el siguiente codigo unificamos estos parámetros anteriores y creamos esta parte del modelo:

Figura 18.

Generación de la distribucion a priori



Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó para obtener la distribucion a priori del modelo Black-Litterman.

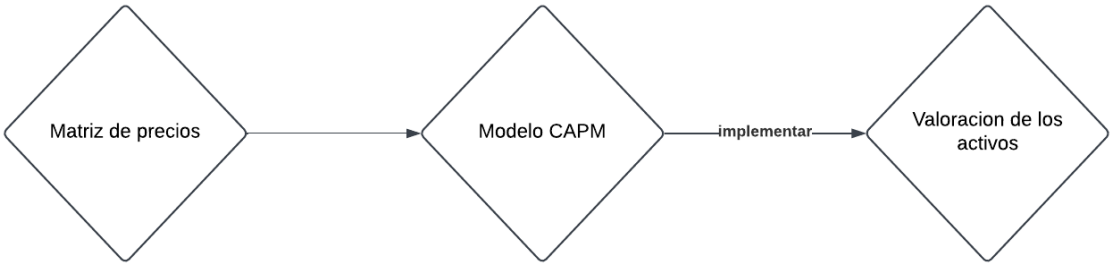
2.1.12. Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM)

Este modelo será utilizado para calcular la rentabilidad que un inversor debe exigir al realizar un inversión en un activo financiero, en función del riesgo que está asumiendo,

el codigo que se muestra a continuación es el cálculo del vector que se utiliza en cada portafolio creado:

Figura 19.

Generación del modelo CAPM



Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó la generación del modelo CAPM para cada portafolio.

En la aplicación del modelo estos son los resultados

Tabla 14.

CAPM del Primer Portafolio

APPLE	0.28
ABBVIE	0.13
AMAZON	0.35
BERKSHIRE HATHAWAY	0.13
GOOGLE	0.21
HOME DEPOT	0.23
ELI LILLY	0.16
MASTERCARD	0.24
META	0.21
PFIZER	0.17
TESLA	0.28
UNITEDHEALTH	0.22
VISA	0.22
EXXON MOBIL	0.14

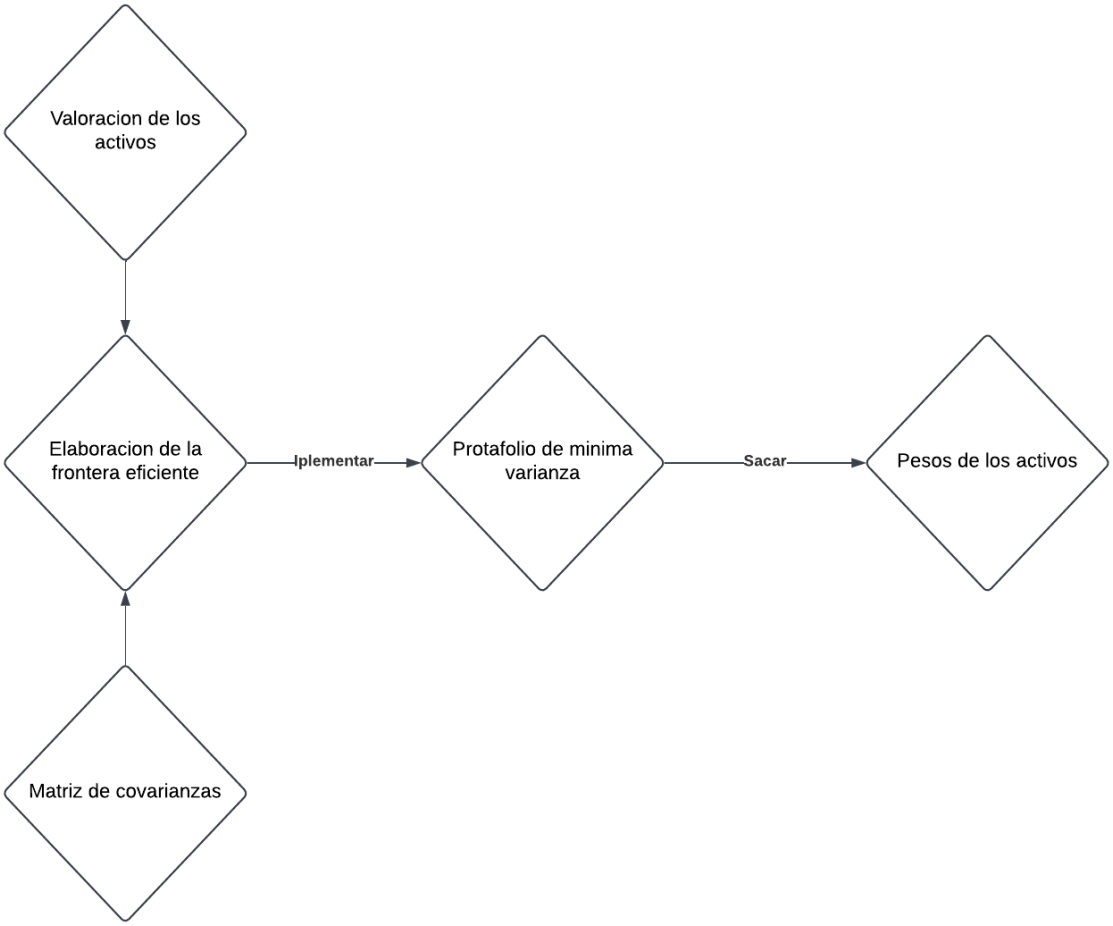
Nota. En la tabla se muestra el modelo CAPM del portafolio 1 con sus rendimientos esperados obtenidos del modelo.

2.1.13. Frontera Eficiente

En esta seccion daremos una frontera eficiente para seleccionar el portafolio de mínima volatilidad en cada uno de los 10 portafolios creados con anterioridad y esto se hace con el siguiente codigo:

Figura 20.

Flujo para la frontera eficiente



Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó para obtener la frontera eficiente de los portafolios.

Dando como resultado los pesos del portafolio de markowitz en el primer portafolio creado.

Tabla 15.

Pesos de las Acciones del Primer Portafolio

APPLE	0.035
ABBVIE	0.120
AMAZON	0.039
BERKSHIRE HATHAWAY	0.092
GOOGLE	0.077
HOME DEPOT	0.050
ELI LILLY	0.068
MASTERCARD	0.071
META	0.094
PFIZER	0.066
TESLA	0.071
UNITEDHEALTH	0.055
VISA	0.085
EXXON MOBIL	0.071

Nota. En la tabla se muestra los pesos del primer portafolio que le corresponden a cada acción según el modelo.

2.1.14. Sharpe Ratio Prior

Una buena comparación entre los portafolios creados es el Sharpe ratio que evalúa el portafolio en que tan riesgos es y que rentabilidad puede generar, su cálculo es con la ecuación anteriormente presentada en el sharpe ratio.

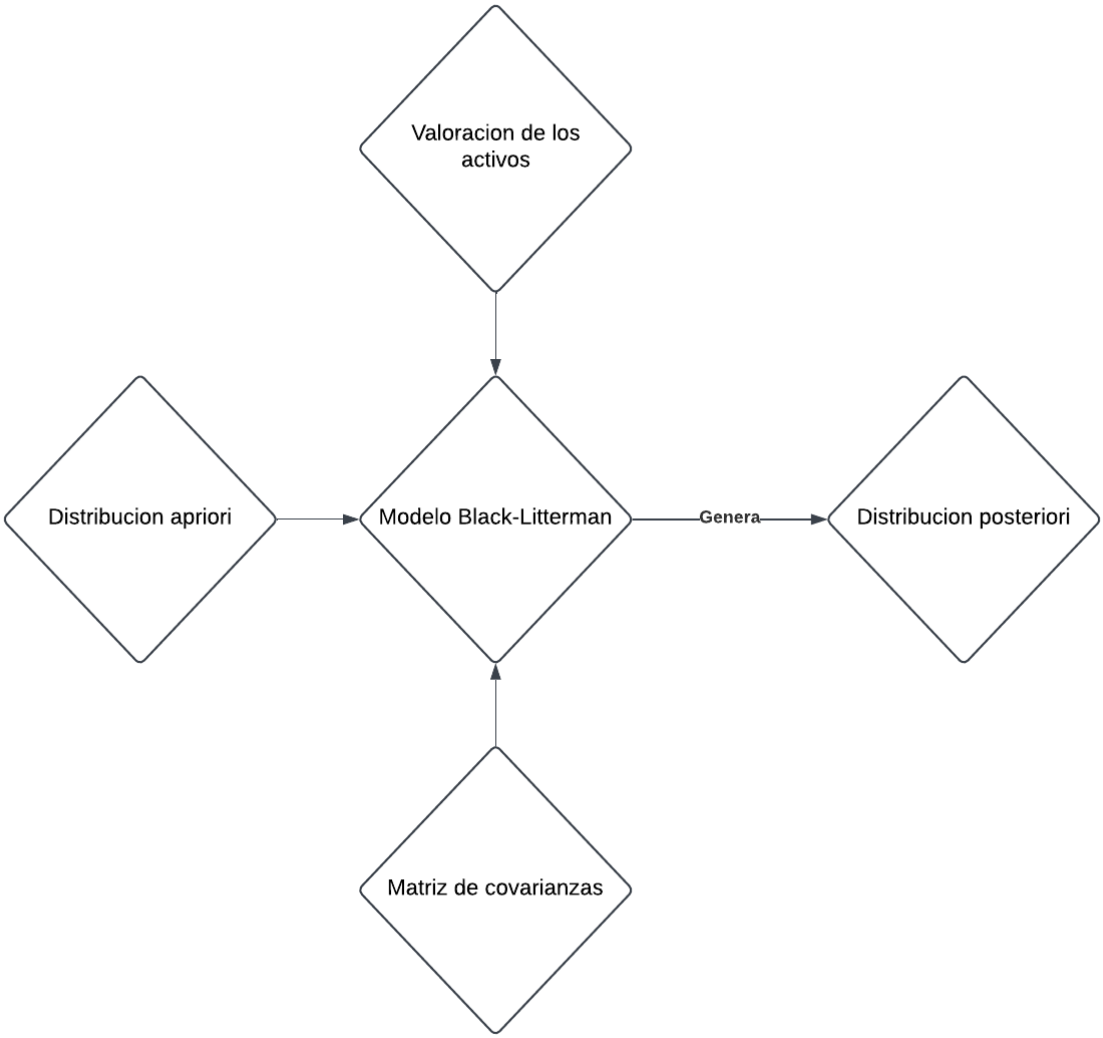
Teniendo estos el primer portafolio tiene una rentabilidad 20.5% E.A. y una volatilidad anual de 10.9%, dando como resultado el sharpe ratio en 1.69

2.1.15. Distribucion a Posteriori del modelo Black-Litterman

Como se ha venido nombrando a lo largo del documento el modelo Black-Litterman tiene un enfoque bayesiano, esto quiere decir que utiliza una distribucion priori y posteriori, que esta se constituye de una combinación de la distribucion priori y unas expectativas que tiene el inversor, esto se consiguió a continuación:

Figura 21.

Generación de la distribucion a posteriori del modelo Black-Litterman

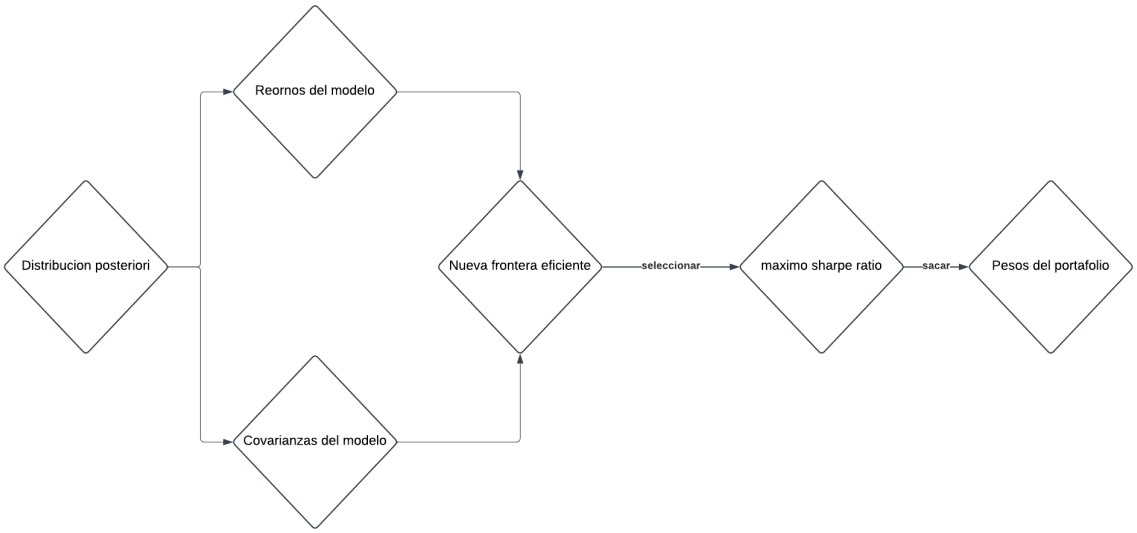


Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó para obtener el modelo Black-Litterman con todos los componentes que lo conforman.

Dada la distribucion posteriori del modelo damos los retornos estimados de dicha distribucion y sus covarianzas para construir la nueva frontera eficiente y de ahí tener la comparación de los nuevos portafolios con el Sharpe ratio, se mostrara el proceso a posteriori del primer portafolio:

Figura 22.

Nuevas métricas del portafolio posteriori



Nota. En la figura se muestra un flujograma de cómo se programó para obtener la distribucion posteriori y pesos del portafolio final.

Ya teniendo esto, el portafolio dio un retorno estimado de 19.6% E.A. y una volatilidad anual del 13.3%, dando un sharpe ratio de 1.33.

3. CONCLUSIONES

En resumen, a lo largo de este trabajo se han llegado a varias conclusiones interesantes que permiten abordar el objetivo principal de la investigación. Se consideró la teoría de los mercados eficientes, ya que uno de los objetivos era verificar si esta teoría se cumple en la realidad. Según esta teoría, los precios y, por ende, los retornos de las acciones no son predecibles y varían de manera aleatoria a corto plazo, por lo que la probabilidad de subida es la misma que de bajada. Se supone que estos siguen una distribución normal. Sin embargo, al aplicar pruebas de normalidad, como las de Shapiro-Wilk y Anderson-Darling, se descubrió que esta teoría no se confirma en la práctica. Esto se debe a que el mercado incorpora un factor psicológico que influye en el comportamiento de los precios cada vez que ocurre un evento que afecta directa o indirectamente la acción analizada. Por lo tanto, para todas las acciones revisadas mediante estas pruebas, se rechazó la hipótesis nula $\boldsymbol{H_0}$, que sostenía que los retornos siguen una distribución normal.

Por otro lado, encontrar el mejor portafolio de inversión variando número y asignación de acciones del S&P500, hubo resultados interesantes, ya que se crearon 10 portafolios mas el portafolio de todas las 20 acciones seleccionadas estos se compararon con el Sharpe ratio, como se muestra a continuación los resultados dados:

Tabla 16.

Resultados Portafolios Creados

Portafolio Total	Expected annual return: 22.7% Annual volatility: 13.9% Sharpe Ratio: 1.49
Portafolio 1	Expected annual return: 19.6% Annual volatility: 13.3% Sharpe Ratio: 1.33
Portafolio 2	Expected annual return: 21.8% Annual volatility: 15.8% Sharpe Ratio: 1.26

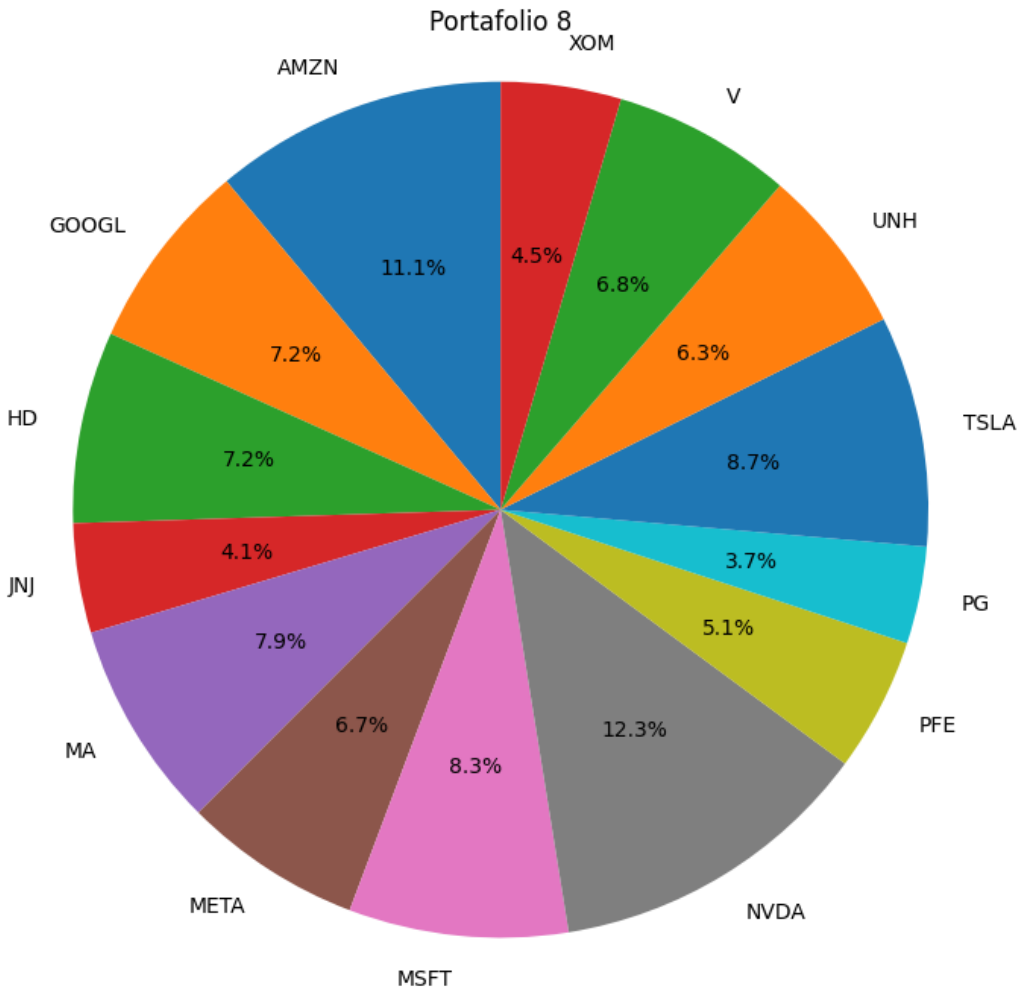
Portafolio 3	Expected annual return: 20.2% Annual volatility: 14.3% Sharpe Ratio: 1.28
Portafolio 4	Expected annual return: 21.0% Annual volatility: 14.7% Sharpe Ratio: 1.29
Portafolio 5	Expected annual return: 19.2% Annual volatility: 13.1% Sharpe Ratio: 1.31
Portafolio 6	Expected annual return: 22.0% Annual volatility: 14.8% Sharpe Ratio: 1.35
Portafolio 7	Expected annual return: 22.3% Annual volatility: 14.4% Sharpe Ratio: 1.41
Portafolio 8	Expected annual return: 25.7% Annual volatility: 14.4% Sharpe Ratio: 1.65
Portafolio 9	Expected annual return: 22.2% Annual volatility: 13.5% Sharpe Ratio: 1.49
Portafolio 10	Expected annual return: 19.2% Annual volatility: 14.1% Sharpe Ratio: 1.22

Nota. En la tabla se muestra los resultados obtenidos de cada portafolio creado y el portfolio total de las acciones.

En la tabla anterior se puede ver un portafolio particular (Portafolio 8) como el más conveniente en términos de rentabilidad (25.7%E.A.) y riesgo anual (14.4%) con un Sharpe Ratio de 1.65 que se muestra a continuación:

Figura 23.

Portafolio Numero 8



Nota. En la figura se muestra el portafolio 8 con todas las acciones que lo conforman y sus pesos asignados a cada una.

Este portafolio en particular nos permite concluir que, además de lo conocido sobre la teoría de portafolios—que implica diversificar y encontrar un equilibrio entre riesgo y rendimiento—es crucial elegir una combinación acertada de activos. Esta combinación debe hacerse de manera cuidadosa y selectiva para optimizar la rentabilidad y el riesgo del portafolio de la mejor manera, evitando la inclusión de activos que puedan afectar negativamente el ratio de Sharpe, como ocurrió con el portafolio que incluía todos los activos y se quedó bastante promedio en comparación con los demás portafolios hechos.

Como puntos de mejora, seguramente en el portafolio más destacado (Portafolio 8) se podría hacer una intervención añadiendo la acción de Apple, y es probable que este ratio aumente un poco más.

Finalmente con lo dicho anteriormente este trabajo deja que la inclusión de una mayor cantidad de activos no garantiza la creación de un mejor portafolio. Es esencial seleccionar cuidadosamente las acciones que más nos convengan para maximizar la rentabilidad del portafolio.

Todos estos resultados se obtuvieron programando en el lenguaje de programación phyton en el siguiente link esta todo el codigo que se utilizo:https://colab.research.google.com/drive/1_3wjvQNeuGc0FP8WrS8IBMf7Z25bxli9?usp=sharing

REFERENCIAS

Althouse, L. A., Ware, W. B., & Ferron, J. M. (1998). *Detecting Departures from Normality: A Monte Carlo Simulation of a New Omnibus Test Based on Moments.* San Diego: Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.

AMV, A. d. (2019). *Guía de estudio administración de portafolios.* Obtenido de https://www.amvcolombia.org.co/wp-content/uploads/2019/08/Gu%C3%ADa-Administraci%C3%B3n-de-Portafolios.pdf

Anderson, T., & Darling, D. (1954). A Test of Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association*, Vol 49, 765-769.

Arévalo Useche, A. J. (2015). *Construcción de portafolios de inversión desde las finanzas del comportamiento. Cuadernos de Administración.* Obtenido de https://www.redalyc.org/pdf/205/20543851001.pdf

Arshad, M., Rasool, M., & Ahmad, M. (2003). Anderson Darling and Modified Anderson Darling Tests for Generalized Pareto Distribution. *Pakistan Journal of Applied Sciences*, Vol 3, 85-88.

Banz, R. (1981). Journal of Financial Economics. En R. Banz, *The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks* (págs. 3-18). New York.

BBC. (6 de Diciembre de 2021). *BBC*. Obtenido de https://www.bbc.com/mundo/noticias-59470575

Berggrun, L. (2009). *Cómo crear un portafolio de inversión con las opciones que ofrecen los fondos de pensiones voluntarias en Colombia: el caso de Skandia.* Obtenido de https://www.icesi.edu.co/revistas/index.php/estudios_gerenciales/article/view/327/325

Bernal, C. M. (2013). Black-Litterman vs. Markowitz: un ejercicio de optimización de portafolios de inversión en Colombia. Bogota: Pontificia Universidad Javeriana.

Black, F., & Litterman, R. (1992). *Global Portfolio Optimization.* Financial Analysts Journal.

Black, F., & Litterman, R. (2003). *Modern Investment Management. Wiley Finance.*

Blanco, L. (2004). *Probabilidad.* Bogota: Universidad Nacional de Colombia.

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2003). Essentials of Investments. En Z. Bodie, A. Kane, & A. Marcus, *Essentials of Investments.* The McGraw.

Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2004). *Principios de inversiones.* Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

Cardenas, Y. A. (2024). Estudio comparativo de dos métodos estadísticos de estimación robusta para optimizar un portafolio con activos de renta variable del mercado bursátil colombiano. Bogota, Colombia.

Carmona, M., & Carrion, H. (2015). Potencia de la prueba Estadistica de normalidad Jarque-Bera frente a las pruebas de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, CHen-Shapiro y Shapiro-Wilk. Toluca, Mexico: Universidad Autonoma del Estado de Mexico.

Castillo, M. (2015). *Toma de Decisiones en las Empresas: entre el arte y la técnica: metodologías, modelos y herramientas.* Bogota: Universidad de los Andes.

Cohen, J. (1962). The statistical power of abnormal-social psychological research: A review. *The Journal of Abnormal and Social Psychology*, 65(3) 145-153.

Cox, D. (1958). Some Problems Connected with Statistical Inference. En D. Cox, *The Annals of Mathematical Statistics* (págs. Vol 29. 357-372). Institute of Mathematical Statistics.

Fama, E. (1970). Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. *Journal of Finance*.

Fama, E., & Blume, M. (1966). Filter rules and stock market trading. *Journal of Finance*.

French, K. (1980). Stock Returns and the Weekend Effect. En K. French, *Journal of Financial Economics* (págs. 55-77). New York.

Gaito, J. (1959). Non-parametric methods in psychological research. En J. Gaito, *Psychological Reports* (págs. Vol 5, 115-125).

Guerrero. (1990). *Desestacionalización de series de tiempo económicas: introducción a la metodología. Comercio Exterior, 40(11):1035–1046. 2, 4, 7.*

Gujarati, D. (2006). *Principios de Econometria.* España: McGraw-Hill/Interamericana de España.

Haro, A. d. (2008). Medición y Control de Riesgos Financieros. En A. d. Haro, *Medición y Control de Riesgos Financieros.* Mexico: EDITORIAL LIMUSA S.A.

He, G. (1999). *The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios.* New York: Goldman Sachs Asset Management.

Hollander, M., & Wolfe, D. (1999). *Nonparametric Statistical Methods.* United States of America: John Wiley & Sons.

Juez, P., & Díez, J. (1997). *Probabilidad y estadística en medicina.* España: Diaz de Santos.

Kulahci, B. a. (2011). *Time series analysis and forecasting by example. John Wiley \& Sons. 7, 8, 9, 10, 11, 14.*

Lee, P. (1997). *Bayesian Statistics.* Michigan.

Letty. (2 de Enero de 2013). *Blogger*. Obtenido de https://valemontenegro.blogspot.com/2013/01/covarianza_4612.html

Linares. (2022). *Predicción de precios de acciones en bolsa a través de redes neuronales.* Madrid.

Lutkevich, B. (2020). *TechTarget*. Obtenido de Monte Carlo simulation: https://www.techtarget.com/searchcloudcomputing/definition/Monte-Carlo-simulation

Malkiel, B. (1973). *A randon walk down Wall Street.* New york: W. W. Norton & Company, Inc.

Mankert, C. (2006). *The Black-Litterman Model - mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice.* Estocolmo: Royal Institute of Technology.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. En H. Markowitz, *Portfolio Selection* (págs. 77-91).

Mascareñas, J. (2018). Gestión de Carteras I: Selección de Carteras. En J. Mascareñas, *Gestión de Carteras I: Selección de Carteras.* Madrid.

Mayellis, Á., & Hidalgo, M. (2015). *Optimal investment portfolio conformation through robust estimation methods, a comparative survey.* Obtenido de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54539

McNemar, Q. (1960). At random: Sense and nonsense. *American Psychologist*, 15(5), 295-300.

Mendes, M., & Pala, A. (2003). Type I Error Rate and Power of Three Normality Tests. En M. Mendes, & A. Pala, *Pakistan Journal of Information and Technology* (págs. Vol 2, 135-139).

Michaud, R. (1989). The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal? *ResearchGate*.

Montgomery, D., & Runger, G. (2014). *Applied Statistics and Probability for Engineers.* John Wiley & Sons, Inc.

Mood, A., Graybill, F., & Boes, D. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* New York: McGraw-Hill.

Nornadiah, M. R., & Yap, B. W. (2010). Power comparisons of some selected normality tests. En M. R. Nornadiah, & B. W. Yap, *Proceedings of the Regional Conference on Statistical Sciences 2010* (págs. 126-138).

Paipilla, L. (2024). Aplicación del valor el riesgo y valor en riesgo condicional al incremento en los costos de atención por diagnóstico de vih en colombia (2013 a 2023). *Funadacion Universidad de America*.

Peña. (2005). *Análisis de series temporales. Alianza. 4, 7, 9.*

Perason, E., & Neyman, J. (1928). On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference: Part I. En E. Perason, & J. Neyman, *Biometrika* (págs. 175-240). United Kingdom: Journal .

Perason, E., & Neyman, J. (1933). On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Royal Society*, 231,289-337.

Pérez Hernandez, F. (2012). Finanzas de Empresas Turísticas. En F. Pérez Hernandez, *Finanzas de Empresas Turísticas.* Madrid.

Pria, M. (03 de Marzo de 2001). Obtenido de http://www.Vcl.sld.cy/75cm/facmedic/webosalud/materiales/mnoparam.html

Quezada, C. (2007). Potencia estadística, sensibilidad y tamaño de efecto: ¿un nuevo canon para la investigación? *Onomázein*, 159-170.

Rasmussen, M. (2003). *Quantitative Portfolio Optimisation, Asset Allocation and Risk Management.* Londres: Palgrave Macmillan.

Ritter, J. (1988). The Buying and Selling Behavior of Individual Investors at the Turn of the Year. *The Journal of Finance*, 701-717.

Roberts, H. (1967). *Statistical versus clinical prediction of the stock market.* Documento no publicado, citado por Brealey y Myers, 1993.

Royston, P. (1982). Algorithm AS 181: The W Test for Normality. En P. Royston, *Applied Statistics* (págs. Vol 31, 176-180). Journal of the Royal Statistical Society.

Ruiz. (2022). *R Studio*. Obtenido de http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/394452 eaa513348793474b9d21505e2429bb05.html

Saldaña, J., Palomo, M., & Blanco, M. (2007). Los Modelos CAPM y APT para la valuación de empresas de Telecomunicaciones con parámetros operativos (The

CAPM and APT Models for valuation of telecommunication companies with operations factors. *InnOvaciOnes de NegOciOs*.

Shapiro, S., & Wilk, M. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). En S. Shapiro, & M. Wilk, *Biometrika* (págs. Vol 52, 591-611).

Siegel, S., & Castellan, J. (1988). *Nonparametric Statistics for The Behavioral Sciences.* New York: McGraw-Hill Book Company.

Stephens, M. (1986). Tests Based on EDF Statistics. En R. D'Agostino, & M. Stephens, *Goodness-of-Fit-Techniques* (págs. 97-193). New York: Marcel Dekker.

Sterling, T. (1959). Publication Decisions and Their Possible Effects on Inferences Drawn from Tests of Significance--Or Vice Versa. *Theodore* , Vol 54, 30-34.

Tukey, J. (1960). Conclusions vs Decisions. En J. Tukey, *Technometrics* (págs. Vol 2 423-433). Taylor & Francis, Ltd.

Tullock, G. (1959). Publication Decisions and Tests of Significance—A Comment. En G. Tullock, *Journal of the American Statistical Association* (págs. Vol 54, 593). Taylor & Francis, Ltd.

Vera Castillo, J., & Rosado Muñoz, Y. (2010). *Predicción del precio de acciones en la Bolsa Mexicana de Valores utilizando la. Guadalajara, Mexico.* Guadalajara.

Walpole, R., Myers, R., Myers, S., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias Novena Edicion.* Mexico: Pearson Educación.

Whitley, E., & Ball, J. (2002). Statistics review 6: Nonparametric Methods. En E. Whitley, & J. Ball, *Statistics review 6: Nonparametric Methods* (págs. Vol 6, 509-513). Critical Care.

Wikiwand. (s.f.). *Wikiwand*. Obtenido de https://www.wikiwand.com/es/articles/Movimiento_browniano_geom%C3%A9trico