

**ESTUDIO COMPARATIVO DE DOS MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE ESTIMACIÓN
ROBUSTA PARA OPTIMIZAR UN PORTAFOLIO CON ACTIVOS DE RENTA
VARIABLE DEL MERCADO BURSÁTIL COLOMBIANO**

YONATHAN ASDRÚBAL CÁRDENAS RAMÍREZ

Proyecto integral de grado para optar al título de
PROFESIONAL UNIVERSITARIO EN ESTADÍSTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES

Director

DANNY MIGUEL REBOLLEDO CASTILLO

Ph.D. en Ciencias Económicas

FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRATIVAS
PROGRAMA DE ESTADÍSTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES
BOGOTÁ, D. C.

2024

NOTA DE ACEPTACIÓN

Nombre

Firma del Director

Nombre

Firma del presidente Jurado

Nombre

Firma del Jurado

Nombre

Firma del Jurado

Bogotá, D. C. febrero de 2024

DIRECTIVOS DE LA UNIVERSIDAD

Presidente de la Universidad y Rector del Claustro

Dr. Mario Posada García Peña

Consejero Institucional

Dr. Luis Jaime Posada García Peña

Vicerrectora Académica

Dra. María Fernanda Vega de Mendoza

Vicerrectora de Investigaciones y Extensión

Dra. Susan Margarita Benavides Trujillo

Vicerrector Administrativo y Financiero

Dr. Ricardo Alfonso Peñaranda Castro

Secretario General

Dr. José Luis Macías Rodríguez

Decano (E) Facultad de ciencia Económicas y Administrativas

Dr. Carlos Mauricio Veloza

Las directivas de la Universidad de América, los jurados calificadores y el cuerpo docente no son responsables por los criterios e ideas expuestas en el presente documento. Estos corresponden únicamente al autor.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	8
1. MARCO TEÓRICO.....	11
1.1 Justificación.....	11
1.2 Pregunta de investigación	12
1.3 Hipótesis	12
1.4 Objetivos	12
1.4.1 <i>Objetivo general</i>	12
1.4.2 <i>Objetivos específicos</i>	12
1.5 Fundamentos de la Teoría de Portafolios.	13
1.6 Teoría de la selección de portafolios.....	15
1.7 El modelo de media-varianza y sus supuestos.	18
1.8 Limitaciones del modelo de media-varianza en la gestión de portafolios.....	20
1.9 Explorando enfoques alternativos en la optimización de portafolios: más allá de la teoría de Markowitz.....	21
1.10 Métodos estadísticos robustos.....	24
1.10.1 <i>Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD)</i>	25
1.10.2 <i>Elipsoide de Mínimo Volumen (EMV)</i>	26
1.11 Mercado Financiero Colombiano	26
1.11.1 <i>Marco Normativo y supervisión financiera en Colombia</i>	27
1.11.2 <i>Descripción del Sistema Financiero Colombiano.</i>	31
1.11.3 <i>Estructura del mercado de valores en Colombia</i>	33
2. MARCO METODOLÓGICO	36
2.1. Concepción del diseño de la investigación	36
2.1.1. <i>Población y muestra</i>	39
2.1.2. <i>Recolección de datos</i>	41

2.1.3. Desarrollo del método clásico de optimización de portafolios de inversión	42
2.1.4. Elección de los métodos estadísticos robustos	46
3. RESULTADOS.....	55
3.1 Análisis de datos.....	55
3.1.1 Análisis de las correlaciones de las empresas listadas en la BVC	56
3.1.2. Análisis de los precios y retornos diarios.....	57
3.1.3. Análisis del portafolio de mínima varianza con el método clásico.	67
3.1.4. Análisis del portafolio de mínima varianza con el método de la Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo MCD.	70
3.1.5 Análisis del portafolio de mínima varianza con el método del Elipsoide de Mínimo Volumen.....	73
3.2 Comparación de los métodos de optimización de portafolios.	76
4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	79
4.1 Discusión	79
4.2 Conclusión	80
BIBLIOGRAFÍA	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. <i>Proceso de administración de portafolio</i>	18
Figura 2. <i>Marco Normativo del Sistema Financiero</i>	28
Figura 3. <i>Autoridades del Sistema Financiero</i>	29
Figura 4. <i>Objetivo de la intervención en el mercado de valores</i>	30
Figura 5. <i>Estructura del sistema financiero en Colombia</i>	32
Figura 6. <i>Estructura del Mercado de Valores en Colombia</i>	34
Figura 7. <i>Perfiles de Riesgo</i>	35
Figura 8. <i>Criterios para seleccionar un enfoque cuantitativo</i>	38
Figura 9. <i>Fases del enfoque cuantitativo</i>	39
Figura 10. <i>Empresas seleccionadas como muestra</i>	41
Figura 11. <i>Relación entre el rendimiento y el riesgo</i>	43
Figura 12. <i>Matriz de correlación de las empresas listadas en bolsa</i>	57
Figura 13. <i>Gráficas de la evolución de los precios de las acciones</i>	58
Figura 14. <i>Histórico de los retornos de las acciones</i>	60
Figura 15. <i>Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de Nutresa</i>	61
Figura 16. <i>Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de Bancolombia</i>	62
Figura 17. <i>Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de ENKA</i>	63
Figura 18. <i>Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de ELCONDOR.CL</i>	64
Figura 19. <i>Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de BMC.CL</i>	65
Figura 20. <i>Frontera eficiente con el método clásico</i>	67
Figura 21. <i>Resultados del modelo MV Global método clásico</i>	68
Figura 22. <i>Frontera eficiente con el método MCD</i>	70
Figura 23. <i>Resultados del modelo MV Global método MCD</i>	72
Figura 24. <i>Frontera eficiente con el método MVE</i>	74
Figura 25. <i>Resultados del modelo MV Global método MVE</i>	75
Figura 26. <i>Comparación de los CV por cada método</i>	77

RESUMEN

La investigación se enfoca en mejorar el proceso de toma de decisiones de inversión mediante la construcción de carteras óptimas más estables y eficientes. Se comparan métodos estadísticos de estimación robusta, como el método de Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD) y el método del Elipsoide de Mínimo Volumen (EMV), con el modelo clásico de Mínima Varianza. Se empleó un enfoque de investigación cuantitativo para evaluar objetivamente la eficacia de estos métodos en la construcción de portafolios de inversión con empresas enlistadas en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Los precios de las acciones se obtuvieron de la plataforma "Yahoo Finance!" y los modelos se implementaron utilizando el programa científico R.

Los resultados evidenciaron que los métodos de estimación robusta superaron al modelo clásico, proporcionando una mejor diversificación y gestión de riesgos. Estos métodos se revelaron como herramientas valiosas para la optimización de portafolios en entornos de mercado volátiles, como es el caso del mercado bursátil colombiano. Esta investigación arroja luz sobre la relevancia de adoptar enfoques más sofisticados y robustos en la construcción de carteras de inversión, especialmente en mercados caracterizados por la volatilidad y la incertidumbre. Los hallazgos sugieren que los inversores podrían beneficiarse significativamente al emplear métodos de estimación robusta en lugar del enfoque clásico de Mínima Varianza, mejorando así la efectividad de sus decisiones de inversión y reduciendo los riesgos asociados. Se proporciona una contribución valiosa al campo de la gestión de carteras al demostrar la utilidad y superioridad de los métodos de estimación robusta en la construcción de carteras de inversión en el contexto específico del mercado bursátil colombiano.

Palabras clave: inversión, estimación robusta, carteras óptimas, métodos estadísticos, Bolsa de Valores de Colombia (BVC), modelos financieros, riesgo, diversificación, mercado volátil, eficiencia.

INTRODUCCIÓN

En un contexto de incertidumbre y constantes fluctuaciones en los precios de los activos financieros, la comunidad de inversionistas se enfrenta al desafío de asignar recursos económicos de manera eficiente. Para tomar decisiones de inversión, los inversionistas utilizan el análisis fundamental y técnico. El análisis fundamental se basa en la recopilación y estudio de una gran cantidad de información sobre factores macroeconómicos y sectoriales que afectan las cotizaciones de las acciones en el mercado. Sin embargo, este enfoque puede ser costoso y complejo en términos analíticos. Por otro lado, el análisis técnico se basa en el uso de modelos estadísticos y gráficos para identificar patrones de comportamiento y pronosticar tendencias en el mercado.

En 1952, Harry Markowitz propuso el modelo de media-varianza (MV) como una forma simplificada y formalizada de construir carteras de inversión. Este modelo permite calcular la frontera eficiente, que representa el conjunto de carteras óptimas que maximizan la rentabilidad esperada dado un nivel de riesgo o minimizan el riesgo dado un nivel de rentabilidad esperada. Aunque este modelo se convirtió en un referente teórico en el campo financiero, su aplicación se ha visto limitada debido a supuestos que no siempre se cumplen, como la distribución normal de los rendimientos esperados y la existencia de datos atípicos.

Por tanto, el objetivo de esta investigación es mejorar el proceso de toma de decisiones de inversión en el mercado financiero mediante la construcción de carteras óptimas que sean más estables y eficientes. Para lograr esto, se propone el uso de métodos de estimación robusta que reduzcan la volatilidad de la cartera al disminuir el impacto de los datos atípicos en el análisis de las matrices de covarianza.

En este documento, se presentarán cuatro capítulos. Primero el Marco Teórico, se presenta la justificación destacando por qué es relevante el estudio y los objetivos que se pretende alcanzar con la investigación, luego la pregunta central de la investigación,

hipótesis, y objetivos; ofreciendo al lector una idea clara del enfoque principal de la investigación. En forma adicional se explora la teoría de portafolios, modelo de optimización y métodos estadísticos avanzados. Por último, se contextualiza al lector sobre el Sistema Financiero Colombiano abordando su estructura y normativa, por último, se presenta también el mercado accionario.

En segundo lugar, se encuentra el Marco Metodológico, donde se detalla el diseño y procedimientos de investigación utilizados. Se seleccionan los métodos robustos y se explica su funcionamiento mediante un caso de estudio utilizando datos de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC).

Seguido se encuentra el tercer capítulo, en el que se presentan los resultados que se centran en el análisis de los datos y la comparación con los métodos de estadística robusta seleccionados con respecto al modelo clásico.

Finalmente, se discuten los hallazgos y se presentan las conclusiones, proporcionando una visión integral y aplicada sobre la gestión de portafolios en este contexto específico del mercado colombiano.

En resumen, esta investigación busca mejorar el proceso de toma de decisiones de inversión mediante la construcción de carteras óptimas más estables y eficientes, utilizando métodos de estimación robusta.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. Justificación

En Colombia, las entidades autorizadas por la Superintendencia Financiera para la realización de operaciones sobre inversión en renta variable según el decreto 2555 de 2010 son las Sociedades Comisionistas de Bolsa de Valores SCVB, las Fiduciarias, Administradoras de Fondos de Pensiones AFP y las Sociedades Administradoras de Inversión SAI. Estas entidades como reciben dinero del público deben tener una adecuada gestión de portafolios para preservar el capital de los inversionistas, a través de modelos regulatorios (modelos estándar) y modelos no regulatorios (modelos internos). En función de lo anterior se desarrolla la presente investigación, con la finalidad de estimar con modelos estadísticos robustos la optimización de portafolios de inversión que cumplan altos estándares cuantitativos y las buenas prácticas en materia de gestión de riesgos financieros.

En general, la gestión de portafolios de inversión es un proceso clave para los inversionistas y las entidades encargadas de gestionar sus activos. En particular, los portafolios de inversión en renta variable son particularmente susceptibles a los riesgos de mercado, como la volatilidad y la incertidumbre. Por lo tanto, es esencial que los gestores de inversión tengan herramientas y técnicas precisas para analizar y gestionar estos riesgos de manera efectiva.

Las entidades autorizadas por la Superintendencia Financiera para realizar operaciones sobre inversión en renta variable están sujetas a rigurosos estándares regulatorios para garantizar la solvencia financiera y la protección de los intereses de los inversores. Estos estándares incluyen requisitos en cuanto a la composición del portafolio y la diversificación, entre otros. Sin embargo, estos estándares son mínimos y no necesariamente aseguran que los portafolios estén optimizados para obtener los mejores rendimientos en relación con los riesgos asumidos.

Por esta razón, muchas entidades de inversión en Colombia también emplean modelos internos para optimizar sus portafolios de inversión. Estos modelos utilizan técnicas estadísticas y matemáticas avanzadas para estimar los riesgos y rendimientos de los activos individuales y del portafolio en su conjunto, y para seleccionar las mejores combinaciones de activos para el portafolio.

1.2. Pregunta de investigación

¿Es eficiente el análisis estadístico de estimación robusta para optimizar un portafolio de activos de renta variable?

1.3. Hipótesis

Los métodos de estadística robusta son más eficientes que el método tradicional de Mínima Varianza (MV) para optimizar portafolios de inversión de activos de renta variable, ofreciendo un mejor balance entre rendimiento y riesgo en el contexto del mercado bursátil colombiano

1.4. Objetivos

1.4.1. *Objetivo general*

Evaluar la efectividad de dos métodos estadísticos de estimación robusta para la optimización de un portafolio de activos de renta variable en el mercado bursátil colombiano.

a. Objetivos específicos

- Evaluar las técnicas estadísticas de estimación robusta Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD) y Elipsoide de Mínimo Volumen (EMV).
- Comparar los rendimientos y riesgos de los activos individuales y del portafolio en su conjunto utilizando los métodos seleccionados, con el fin de determinar cuál

ofrece una mejor optimización del portafolio en términos de rendimiento y gestión de riesgos.

- Discutir las implicaciones prácticas de los resultados obtenidos y ofrecer recomendaciones para la gestión de portafolios de inversión en renta variable en el mercado bursátil colombiano.

1.5. Fundamentos de la Teoría de Portafolios

La definición de portafolio de inversión desde un punto de vista práctico y desde la experiencia, se refiere a una colección de diversos activos financieros que un inversionista posee en una cartera con el propósito de generar rendimiento y distribuir el riesgo. En este mismo sentido, en la guía de estudio de Administración de Portafolios del Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia AMV, se define el concepto de portafolio de inversión como un conjunto o combinación de activos financieros, complementando con la definición de administración de un portafolio de inversión, que se refiere a la evaluación, selección, administración y control del portafolio para el cumplimiento de un objetivo determinado. (Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia AMV, 2019).

Ahora bien, en este contexto se puede afirmar que el análisis de portafolios de inversión desempeña un papel esencial en las finanzas, ya que se enfoca en la evaluación y gestión de activos financieros en función de sus rendimientos históricos, volatilidad y correlaciones. Esta disciplina busca responder preguntas fundamentales, como la asignación óptima de activos, es decir, cómo distribuir los recursos entre diferentes clases de activos, y la identificación de estrategias que permitan maximizar los rendimientos mientras se controla el riesgo.

La teoría de portafolios se originó en la década de 1950 con dos investigaciones destacadas. Harry Markowitz, conocido como el padre de esta teoría, realizó la primera investigación titulada Portfolio Selection, donde demostró matemáticamente los beneficios de la diversificación en la reducción de la volatilidad de un portafolio (AMV,

2019). Por otro lado, James Tobin llevó a cabo la segunda investigación en 1958, concluyendo que los inversionistas son aversos al riesgo y requieren mayores retornos para asumir mayores niveles de riesgo, basándose en un análisis del comportamiento en situaciones de incertidumbre. Esta teoría aborda preguntas fundamentales en la inversión, como la selección de activos, la asignación de ponderaciones y la determinación de rendimientos exigidos en función del riesgo asumido (AMV, 2019).

El enfoque de Markowitz ha tenido una profunda influencia en la teoría y práctica financieras. En este, Markowitz formuló el método de media-varianza para construir carteras óptimas. Dicho método, parte de la suposición de un agente racional que busca minimizar el riesgo dado un nivel de retorno mínimo esperado o maximizar la rentabilidad dado un nivel de riesgo máximo deseado. Estos aportes fundamentales fueron reconocidos en 1990 con el Premio Nobel de Economía, otorgado a Markowitz por su trabajo pionero en la teoría de la economía financiera (Useche Arévalo, 2015).

Además de Markowitz, otros estudiosos como William F. Sharpe, John V. Lintner Jr. Y Jan Mossin también realizaron contribuciones significativas basadas en los principios de Markowitz. De manera independiente, desarrollaron el Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM), que permite calcular la tasa de retorno esperada de un activo riesgoso. Este modelo utiliza una ecuación lineal que agrega la tasa libre de riesgo y una prima de riesgo basada en la sensibilidad del activo al comportamiento del mercado, medida a través del coeficiente Beta (Useche Arévalo, 2015).

La gestión eficaz de los portafolios de inversión comprende varias fases, incluyendo el análisis de los títulos a través de la rentabilidad esperada, la volatilidad y la covarianza, así como el análisis de las carteras desde sus rendimientos y riesgos probables. Entre las carteras seleccionadas, se busca encontrar la óptima de acuerdo con las preferencias y objetivos del inversionista (Mayellis & Hidalgo, 2015).

1.6. Teoría de la selección de portafolios

El proceso de selección de un portafolio se divide en dos etapas cruciales. La primera etapa se inicia con la observación y la experiencia, llevando a la formación de creencias sobre el desempeño futuro de los activos financieros disponibles. La segunda etapa se centra en la elección del portafolio en función de estas creencias. En este contexto, se exploran distintas reglas de inversión, en primer lugar, se considera la regla que sugiere que los inversionistas deberían maximizar los retornos, sin embargo, esta regla se rechaza tanto como una hipótesis para explicar el comportamiento de las decisiones de inversión, así como un máximo para la toma de decisiones (Markowitz, 1952).

En cambio, se examina la regla que valora el retorno esperado como algo deseable y la varianza del retorno como algo indeseable, y esta regla emerge como sólida tanto en términos de guía para el comportamiento de inversión como en términos de hipótesis. Estas reglas se ilustran en relación con la regla de retorno esperado-varianza MV, además, la maximización de los retornos no siempre implica la superioridad de la diversificación de activos en un portafolio, lo que subraya la importancia de la diversificación en el contexto de la Teoría de la Selección de Portafolios (Markowitz, 1952).

Para construir un portafolio de inversión de manera efectiva, es necesario determinar la combinación ideal de activos financieros que minimice el riesgo y maximice el retorno. Esto implica dos pasos clave: en primer lugar, identificar los activos en los que se invertirá y, en segundo lugar, decidir cuánto se destinará a cada uno de estos activos. La elección de estos activos se basa principalmente en tres factores fundamentales: liquidez, rentabilidad y riesgo. Generalmente, los activos más líquidos son aquellos que tienen un alto volumen de transacciones en mercados altamente organizados y desarrollados (Delgado Vélez & Durango Gutiérrez, 2018).

El objetivo de inversión es la meta que busca un cliente con sus inversiones, considerando tanto la rentabilidad como el riesgo. Este objetivo debe estar en

consonancia con la relación riesgo-rentabilidad, lo que implica que un mayor rendimiento puede ir acompañado de niveles de riesgo correspondientes. Los objetivos de inversión se dividen en cuatro categorías: apreciación de capital, que busca un crecimiento a largo plazo; preservación de capital, orientada a minimizar el riesgo y mantener el poder adquisitivo; ingresos actuales, destinada a generar ingresos para costos de vida; y retorno total, que combina la valorización de capital con la reinversión de ganancias. Estas categorías guían las decisiones de inversión de acuerdo con las necesidades y tolerancia al riesgo de cada inversionista (AMV, 2019).

La historia financiera ha demostrado que las inversiones a largo plazo tienen más riesgo en comparación con las inversiones de corto plazo, es el caso de los activos de renta fija, mientras que las acciones también conllevan riesgos. Sin embargo, las inversiones más arriesgadas han tendido a ofrecer rendimientos promedio más altos. En la práctica, los inversores suelen diversificar sus carteras, incluyendo una variedad de activos, como letras del Tesoro libres de riesgo y acciones de alto riesgo (Bodie et al., 2004).

Una forma efectiva de gestionar el riesgo en una cartera es determinar la proporción de inversión en valores seguros, como las obligaciones del Tesoro y otros activos de mercado seguro, en comparación con activos más riesgosos. Esta decisión se conoce como asignación de activos y es fundamental en la construcción de carteras, según la mayoría de los profesionales de inversiones, siendo la parte más crucial en la selección de una cartera (Bodie et al., 2004).

La asignación estratégica de activos representa la decisión de asignar inversiones a largo plazo y se considera generalmente la más crucial en el proceso de inversión. Implica establecer una asignación óptima de fondos a largo plazo basada en expectativas sobre el riesgo y el rendimiento futuro de activos y su estructura de correlación. Más que determinar el rendimiento de las clases de activos y su peso a largo plazo, la asignación táctica de activos busca aprovechar la correlación entre estos para alcanzar el perfil de rendimiento – riesgo deseado a largo plazo a través del rebalanceo del portafolio, es decir, comprando y vendiendo activos en el corto y mediano plazo según el

comportamiento del mercado. Para implementación de esta última, para la mayoría de los clientes se desarrolla un marco cuantitativo que refleja las declaraciones de política de inversión, lo que sirve como guía tanto para el cliente como para el gestor de activos y garantiza la conformidad con las metas de inversión estipuladas (Rasmussen, 2003).

Por último, la gestión de carteras implica la acción de agrupar activos de manera personalizada en un portafolio que se adapte a las necesidades del inversionista, además de un seguimiento constante y una evaluación de su rendimiento. Según (Bodie et al., 2014, citado en AMV, 2019), para planificar y llevar a cabo una estrategia de gestión de carteras con éxito, es esencial contar con un profundo entendimiento del cliente en relación con su tolerancia al riesgo, horizonte temporal y metas de inversión. Un esquema en el que se puede representar de manera resumida el proceso de administración de portafolio es el siguiente:

Figura 1.

Proceso de administración de portafolio



Nota. La figura representa el proceso para la administración de portafolios de inversión tomando en cuenta sus diferentes etapas (Conocimiento del cliente, generación de su perfil de riesgo, estrategia de inversión y seguimiento). Citado en: Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia AMV. (2019). *Guía de estudio administración de portafolios* (3.^a ed., Vol. 8, pp. 1-86). <https://www.amvcolombia.org/wp-content/uploads/2019/08/Gu%C3%ADa-Administraci%C3%B3n-de-Portafolios.pdf>.

1.7. El modelo de media-varianza (MV) y sus supuestos

En este apartado, exploraremos los supuestos subyacentes al modelo MV de Markowitz y su relación con el mercado financiero de ese entonces, estableciendo una base para comprender su aplicación y limitaciones.

Desde el trabajo pionero de Harry Markowitz en 1952, la metodología de media-varianza (MV) ha sido ampliamente utilizada para abordar el problema de selección de cartera. Esta metodología se basa en tratar los rendimientos de los activos individuales como variables aleatorias y utiliza el valor esperado y la varianza para medir el rendimiento y el riesgo de la inversión, respectivamente. Los inversores racionales tienden a minimizar el riesgo para un nivel de rendimiento esperado y/o maximizar el rendimiento esperado para un nivel de riesgo establecido. El enfoque de MV se ha convertido en un enfoque fundamental en la toma de decisiones de inversión (Zhang et al., 2018).

Los supuestos del modelo de Markowitz han sido examinados desde una perspectiva teórica en investigaciones como la de Mayellis & Hidalgo (2015). Estos supuestos, algunos de los cuales son reconocidos como restricciones teóricas en el trabajo original de Markowitz en 1952, han sido objeto de una revisión detallada realizada por diferentes autores; los cuales reconocen que el modelo de Markowitz es una aproximación matemática y que existen más factores que influyen en la decisión final la optimización de un portafolio, tales como:

- “El inversionista actúa con una convicción probabilística cuadrático-paramétrica de la distribución de los rendimientos ... (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13)”, es decir, que el inversionista hace estimaciones y cálculos a través de una función que incluye parámetros específicos, por lo tanto, “... los insumos estadísticos del modelo son: la rentabilidad esperada y la varianza de los rendimientos de los activos y las covarianzas entre estos ...” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13).
- “Los inversionistas consideran que cada inversión está representada por una distribución de probabilidad de los retornos esperados para un período determinado.” (AMV, 2019, p. 45). Al mismo tiempo que consideran “... que cada inversión está representada por una probabilidad de distribución de los retornos esperados ...” (AMV, 2019, p. 45).
- “Las diferentes opciones entre las que el inversionista debe escoger, pueden expresarse matemática y gráficamente en función de las variables: varianza y rendimiento esperado.” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13). Esto es fundamental en

la teoría moderna de carteras, donde se busca encontrar el equilibrio óptimo entre riesgo y rendimiento al construir una cartera de inversiones. Este proceso "... dependerá del perfil del inversionista frente al riesgo ...". (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13)

- "En el mercado existe una cantidad i de títulos valores fraccionables que al ser combinados forman una gama de portafolios ..." (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13).
- "El modelo ignora todo tipo de costos de transacción, impuestos y las comisiones implícitas en la inversión ..." (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13).
- "El mercado de capitales se encuentra en equilibrio y los inversionistas tienen expectativas semejantes ..." (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 13).
- "... los agentes son aversos al riesgo; ante dos activos que se encuentren rentando lo mismo, el inversionista optará por aquel que le genera menor riesgo." (AMV, 2019, p. 26).
- "Los inversionistas buscan maximizar su función de utilidad para un periodo específico, tienen una conducta racional." (AMV, 2019, p. 45). La racionalidad en este contexto sugiere que los inversionistas no tomarán decisiones impulsivas o irracionales, sino que buscarán estrategias que les permitan alcanzar sus objetivos financieros de la manera más eficiente posible.

1.8. Limitaciones del modelo de media-varianza en la gestión de portafolios

El modelo de MV de Markowitz ha establecido los fundamentos para la selección óptima de cartera. Sin embargo, en los complejos y volátiles mercados financieros, surgen requisitos más específicos que deben ser considerados. En primer lugar, se debe abordar la selección de cartera en un contexto multi-periodo para tener en cuenta la dinámica constante de los mercados financieros. Además, es esencial tener en cuenta restricciones prácticas, como los costos de transacción, las reglas de negociación, los tipos de valores disponibles y las restricciones impuestas por el mercado de valores, entre otros (Zhang et al., 2018).

Un desafío importante radica en la sensibilidad de las carteras óptimas a los errores en la estimación de los parámetros de la muestra, como la media y la desviación estándar de los activos. Además, la predicción precisa de los futuros rendimientos y riesgos de los valores es un desafío, especialmente cuando la cantidad de datos de muestra es limitada. En tales casos, recurrir a las sugerencias de expertos y a los informes financieros puede proporcionar una base sólida para la toma de decisiones en la selección de cartera (Zhang et al., 2018).

1.9. Explorando enfoques alternativos en la optimización de portafolios: más allá de la teoría de Markowitz

El artículo de investigación de Zhang et al. (2018) se enfoca en revisar cuatro aspectos clave relacionados con las extensiones del modelo de MV de Markowitz para abordar las necesidades específicas de los mercados financieros, garantizando así que los inversores puedan tomar decisiones informadas y efectivas en su estrategia de selección de cartera.

1.9.1. *El enfoque de la optimización dinámica*

El modelo de Markowitz se ha extendido a modelos multi – período que abordan las limitaciones sobre el horizonte de tiempo de la inversión. Estas extensiones han seguido principalmente dos corrientes, en la primera, se ha estudiado el problema de selección de portafolios en tiempo discreto, con contribuciones destacadas de investigadores que propusieron un modelo de inversión de consumo en tiempo discreto y multi – período, con el objetivo de maximizar la utilidad esperada de la riqueza del inversionista al final del período. En la segunda corriente, se han investigado modelos de selección de portafolios en tiempo continuo, con contribuciones notables de autores que desarrollaron un modelo en tiempo continuo para maximizar la utilidad esperada dentro de un horizonte de planificación fijo. Otros analizaron las estrategias de portafolio cuando se permite el rebalanceo continuo entre los datos actuales y el horizonte de inversión (Zhang et al., 2018). Acerca de este enfoque se pueden destacar los siguientes:

- Técnica de inserción.
 - Técnica de inserción en un modelo de cartera en tiempo discreto.
 - Técnica de inserción en un modelo de cartera en tiempo continuo.
- Método dual de Lagrange.
- Método de campo medio.
- Control inconsistente en el tiempo.

1.9.2. El enfoque de factores prácticos

En el contexto de la selección de portafolios, se ha abordado el desafío de incorporar costos de transacción en modelos de optimización. El modelo MV original de Markowitz, que se basa en la teoría de carteras, no tiene en cuenta estos costos, lo que puede llevar a resultados poco realistas en situaciones prácticas. A lo largo de los años, diversos estudios han explorado enfoques para optimizar portafolios teniendo en cuenta costos de transacción, considerando tanto costos proporcionales como fijos. Estos esfuerzos buscan mejorar la aplicabilidad de la teoría de carteras a situaciones del mundo real, donde los inversionistas buscan maximizar la utilidad o la riqueza teniendo en cuenta los desafíos prácticos asociados con las transacciones financieras (Zhang et al., 2018). Sobre este enfoque se pueden mencionar los siguientes métodos:

- Costos de transacción.
- Selección de cartera de inversión basada en MV bajo diversas restricciones.
- Restricciones de reglas comerciales.
 - Restricciones de valores.
 - Restricciones de escenarios de mercado.
 - Restricciones no convexas.
- El enfoque heurístico.

1.9.3. El enfoque de técnicas robustas

Varios estudios que demuestran los efectos de los errores de estimación en los portafolios de MV. Por ejemplo, en una investigación se encontró que los portafolios de MV a menudo son maximización de errores, lo que significa que son más sensibles a los errores de estimación que a los cambios reales en los rendimientos de los valores. Otra investigación se encuentra que los pesos de los portafolios de MV son altamente sensibles a cambios en el valor medio. Un autor indicó que incluso pequeñas modificaciones en las estimaciones de los valores medios o las varianzas pueden dar lugar a soluciones drásticamente diferentes en los portafolios óptimos de MV. Para reducir el impacto de los errores de estimación, se han desarrollado modelos de selección de portafolios de MV más robustos. Estos modelos utilizan técnicas de optimización robustas, como el enfoque Bayesiano (portafolio previo bayesiano y portafolio de contracción Bayes-Stein), el portafolio de varianza mínima global, la optimización robusta y la selección de portafolios difusos, entre otros, para encontrar portafolios que sean menos sensibles a los errores de estimación (Zhang et al., 2018). Para este enfoque se pueden mencionar los siguientes métodos:

- Enfoque bayesiano.
 - Portafolio previo bayesiano.
 - Portafolio de contracción Bayes-Stein.
- Determinante de Covarianza Mínima (MCD).
- Elipsoide de Volumen Mínimo (MVE).
- Estimador Gnanadesikan y Kettenring Ortogonalizado (OGK).

Estimación Robusta en la Gestión de Portafolios:

- Concepto de estimación robusta en estadísticas y su aplicabilidad en finanzas.
- Ventajas de la estimación robusta en la gestión de portafolios.
- Métodos estadísticos robustos para la estimación de parámetros de activos financieros.

- Relación entre la estimación robusta y la mitigación de datos atípicos en análisis de portafolios.

1.10. Métodos estadísticos robustos

El uso de métodos estadísticos robustos es esencial para lidiar con datos reales que pueden contener imperfecciones, valores atípicos o no cumplir con suposiciones de normalidad. Estos métodos mejoran la robustez, la generalización y la confiabilidad de los análisis estadísticos, lo que los convierte en una herramienta valiosa en la investigación y la toma de decisiones basadas en datos.

Según Ronchetti Elvezio (2021) la estadística robusta se enfoca en abordar las desviaciones de los modelos ideales y sus posibles impactos en los procedimientos de inferencia. Su principal objetivo es desarrollar métodos que sigan siendo confiables y eficientes incluso cuando se presentan desviaciones del modelo original. Esto significa que la estadística robusta se considera una extensión de la estadística paramétrica, ya que reconoce que los modelos paramétricos son, en el mejor de los casos, simplificaciones de la realidad.

La estadística robusta ha desempeñado un papel importante en el avance de la estadística moderna al introducir una variedad de ideas, conceptos y herramientas que hoy en día son fundamentales en la estadística convencional. Es evidente que la robustez continuará evolucionando junto con el desarrollo actual de la estadística y el análisis de datos, enfrentando los mismos desafíos que se presentan en este campo en constante cambio (Ronchetti Elvezio, 2021).

Por otra parte, en el análisis de la optimización robusta Kobayashi et al. (2021) aborda la incertidumbre en los datos de entrada, afirma que ha desempeñado un papel importante en la optimización de portafolios. Kobayashi, complementa con que, los conjuntos de ambigüedad basados en momentos, que contienen distribuciones de probabilidad de los rendimientos de activos cuyos momentos satisfacen ciertas condiciones, son

comúnmente utilizados en la optimización de portafolios de manera robusta en términos de distribución de probabilidad (Kobayashi et al., 2021).

Dado lo anterior, en esta investigación, se evaluarán dos métodos de estadística robusta para optimizar portafolios. Estos métodos se destacan por su practicidad con el manejo de datos en el entorno de programación R y su relevancia en aplicaciones financieras. De estos métodos presentamos sus generalidades y principales características a continuación.

1.10.1. *Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD)*

Este método se utiliza para identificar y resaltar patrones atípicos o valores extremos en un conjunto de datos multivariados. Su objetivo principal es encontrar el subconjunto más pequeño de observaciones que minimiza el determinante de la matriz de covarianza de ese subconjunto. En otras palabras, busca identificar un conjunto de observaciones que sea menos influenciado por valores extremos o atípicos.

Según Mayellis & Hidalgo (2015) el desafío de desarrollar estimadores con una alta resistencia a valores atípicos fue abordado por Rousseeuw en 1984, cuando introdujo el método estadístico conocido como "Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD, por sus siglas en inglés), diseñado para estimar los parámetros de ubicación y dispersión en datos multivariados. El MCD se destaca por su capacidad para identificar y mitigar la influencia de valores atípicos en la estimación de la media y la matriz de covarianzas de manera eficiente.

El propósito del método MCD es identificar una submuestra específica de observaciones a través de la búsqueda de la matriz de covarianza con el menor determinante posible. Este proceso implica la evaluación de todas las posibles permutaciones de una combinación de elementos extraídos de una muestra inicial que consta de n observaciones multivariantes (Mayellis & Hidalgo, 2015).

Finalmente, el método MCD ofrece una solución para la estadística convencional y un recurso significativo para aquellos que buscan obtener estimaciones confiables en presencia de datos anómalos a partir de una matriz de covarianzas, lo que lo hace especialmente útil en aplicaciones financieras y otros campos de la ciencia.

1.10.2. *Elipsoide de Mínimo Volumen (EMV)*

Es una técnica utilizada en el análisis de datos multivariantes que permite detectar y gestionar valores atípicos o datos anómalos en un conjunto de datos. A través de la construcción de un elipsoide que abarca la mayoría de los puntos de datos, e identificar de manera eficiente los puntos que se desvían significativamente de la tendencia general de los datos (Mayellis & Hidalgo, 2015).

Esta técnica se ha convertido en una herramienta esencial en la estadística robusta, ya que permite mitigar el impacto de valores atípicos en los resultados de los análisis estadísticos y mejorar la calidad de la toma de decisiones basada en datos (Mayellis & Hidalgo, 2015).

En este método, el énfasis recae en encontrar un elipsoide de volumen mínimo que aún incluya la mayor cantidad posible de datos, lo que lo convierte en una técnica valiosa para identificar y tratar valores anómalos en una amplia variedad de aplicaciones estadísticas y de análisis de datos (Mayellis & Hidalgo, 2015).

1.11. Mercado Financiero Colombiano

El mercado financiero colombiano es un componente esencial de la economía del país y desempeña un papel crucial en el desarrollo económico de Colombia. Este mercado comprende una amplia gama de instituciones financieras, instrumentos y participantes que facilitan la canalización de fondos entre los inversionistas y las entidades que requieren financiamiento. Uno de los aspectos más destacados es la Bolsa de Valores

de Colombia (BVC), que sirve como el principal centro de negociación de acciones, bonos y otros instrumentos financieros.

La aplicación de modelos y teorías financieras, como la optimización de portafolios, juega un papel esencial para los inversionistas y las entidades financieras que buscan tomar decisiones informadas y gestionar el riesgo en el mercado bursátil colombiano.

“Es una realidad innegable que los mercados financieros son vitales para el crecimiento de las economías, y que un alto grado de inclusión en estos refleja estados de economías avanzadas.” (Banco Mundial, 2016, citado en Rojas Arias, 2016, p. 7).

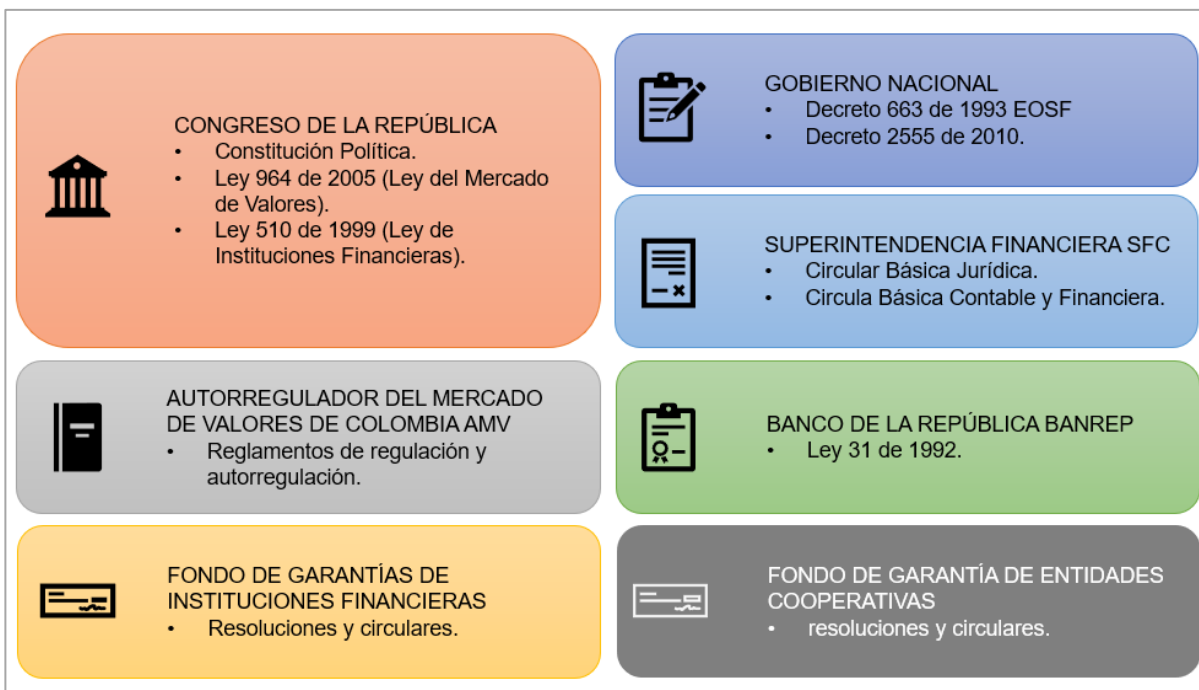
El mercado financiero se caracteriza por ser complejo, dinámico y con imperfecciones, incluyendo concentración y barreras de entrada y salida. El Estado busca garantizar la estabilidad y robustez de este mercado como parte de su estrategia para impulsar el crecimiento económico y reducir las desigualdades en los ingresos nacionales. Esto se logra mediante la generación de ingresos a través del mercado financiero y una asignación segura de la riqueza entre los diversos actores económicos (Rojas Arias, 2016).

1.11.1. Marco Normativo y supervisión financiera en Colombia

Se basa en un conjunto de leyes, reglamentaciones y entidades que regulan y supervisan las actividades financieras en el país. es fundamental para garantizar la estabilidad y la confianza en el sector financiero. La Superintendencia Financiera de Colombia SFC desempeña un papel central en la supervisión y regulación de las entidades financieras, mientras que las leyes y normativas establecen las reglas que rigen las actividades financieras en el país.

Figura 2.

Marco Normativo del Sistema Financiero



Nota. La figura representa las principales autoridades del Sistema Financiero de Colombia y las leyes, normas, reglamentos o circulares relacionadas más significativas para la supervisión de este.

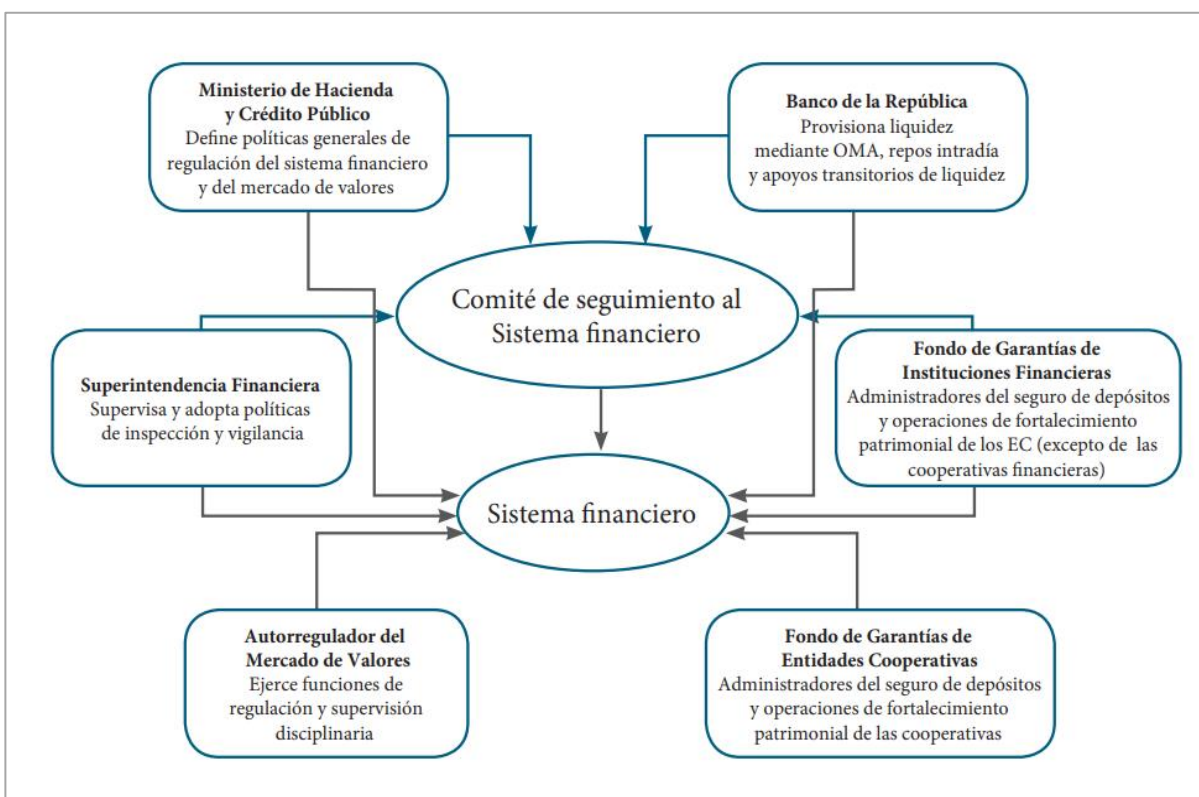
a. Fundamentos de la intervención

La intervención del Estado en la economía colombiana se lleva a cabo a través de varios poderes públicos y mediante diversos instrumentos. El Congreso de la República desempeña un papel crucial en esta intervención, ya sea emitiendo leyes específicas de intervención económica o a través de otras leyes relacionadas con la regulación económica. La Constitución de 1991 también otorgó importantes competencias a la rama ejecutiva del poder público, permitiéndole no solo la potestad reglamentaria, sino también funciones de inspección, supervisión y control sobre ciertas actividades y actores económicos (Rojas Arias, 2016).

Según AMV (2022) la Constitución de 1991 otorgó al Estado amplias facultades de intervención en la economía, distribuyendo funciones entre los diferentes órganos de poder. En el ámbito de la actividad financiera, bursátil y aseguradora, así como en la gestión de recursos captados del público, el Artículo 335 de la Constitución establece un régimen de intervención estatal reforzada debido a su implicación en el interés público. Se diferencian dos tipos de intervención en el mercado: regulatoria y de vigilancia.

Figura 3.

Autoridades del Sistema Financiero



Nota. La figura representa las principales autoridades del Sistema Financiero de Colombia y las funciones con las que cuentan para mantener la estabilidad del sistema. Las flechas grises indican su pertenencia al Sistema Financiero y las flechas azules indican que además pertenecen al Comité de seguimiento al Sistema Financiero.
Fuente: Uribe Escobar, J. (2013, enero 30). El sistema financiero colombiano: estructura y evolución reciente. *Revista del Banco de la República*, 5-18. https://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/archivos/rbr_nota_1023.pdf.

El Congreso de la República desempeña un papel fundamental en la regulación del mercado de valores a través de la expedición de leyes marco que establecen la estructura y los lineamientos generales para la regulación gubernamental. La Ley 964 de 2005 es un ejemplo de esta ley marco, junto con las normas contenidas en el EOSF.

El Gobierno Nacional, específicamente el Ministerio de Hacienda y Crédito Público, ejerce su autoridad mediante la emisión de decretos reglamentarios. Estos decretos se basan en las facultades otorgadas por el Congreso a través de la ley marco que rige la actividad financiera, bursátil y aseguradora. Un ejemplo de esta regulación se encuentra en el Decreto 2555 de 2010.

Figura 4.

Objetivo de la intervención en el mercado de valores



Nota. La figura representa los objetivos de la intervención regulatoria del Gobierno Nacional en el mercado de valores de Colombia. **Fuente:** Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia AMV. (2022). *Guía de estudio regulación* (3.^a ed.). <https://www.amvcolombia.org.co/wp-content/uploads/2022/04/Guia-Regulacion-Operador-V.-240422.pdf>.

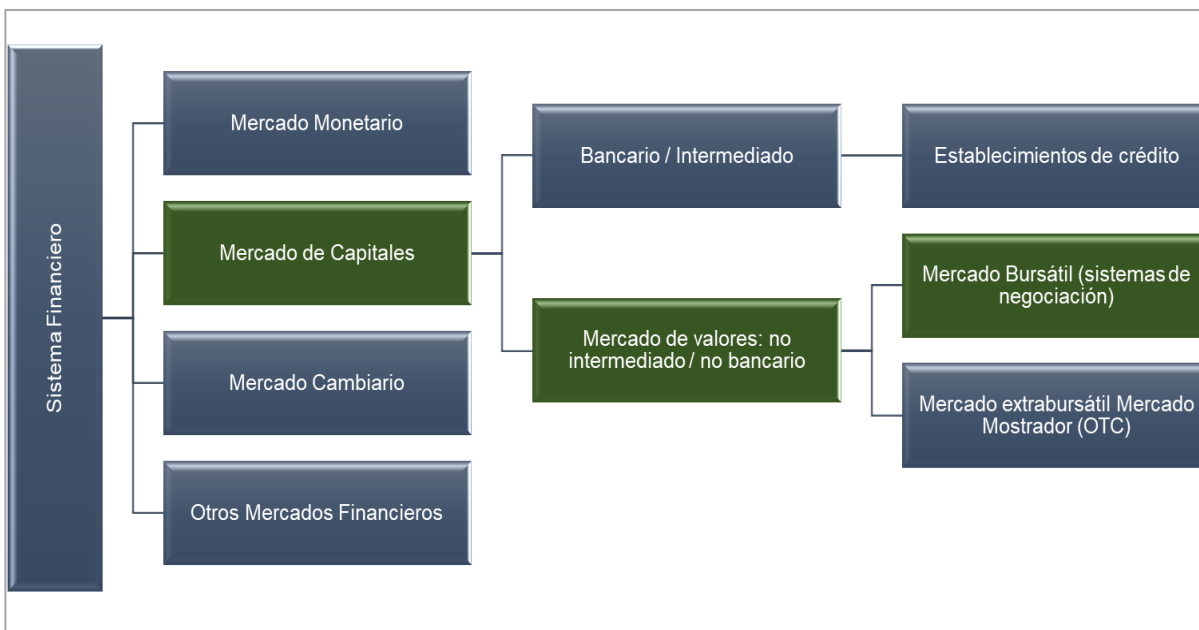
1.11.2. Descripción del Sistema Financiero Colombiano.

Según Uribe Escobar, (2013) el Sistema Financiero ha experimentado una importante evolución en los últimos años. Tras la crisis financiera de finales de los años 90, el sector se ha fortalecido gracias a la regulación del Gobierno Nacional y de la Superintendencia Financiera de Colombia (SFC). Este sistema ha pasado de un esquema de banca especializada a unos de multibanca. Con la Ley 45 de 1990, se introdujo en el país el modelo de matrices y filiales, que permite a los bancos ofrecer una gama más amplia de productos y servicios.

En el marco teórico de Mayellis & Hidalgo, (2015), se destaca el papel crucial del Sistema Financiero Colombiano, que engloba diversas instituciones facilitadoras del intercambio de recursos mediante operaciones financieras. Este sistema desempeña un papel esencial en la gestión de inversiones y la promoción de la estabilidad macroeconómica en Colombia. Su estructura se compone de cuatro mercados principales, cada uno destinado a gestionar diferentes tipos de instrumentos financieros, con el objetivo de canalizar recursos hacia diversos sectores económicos y fomentar el crecimiento sostenible. Además, las instituciones financieras, incluyendo el Banco de la República, tienen un rol clave en la gestión de inversiones y la evaluación de riesgos para garantizar una asignación eficiente de recursos y el crecimiento económico del país. La siguiente imagen presenta de manera clara estos mercados.

Figura 5.

Estructura del sistema financiero en Colombia



Nota. La figura representa al sistema financiero en Colombia teniendo en cuenta sus principales mercados (Monetario, Capitales, Cambiario y otros), se resalta en color verde la ruta sobre los mercados a trabajar en la presente investigación.

Las operaciones efectuadas por el Sistema Financiero Colombiano desempeñan un rol fundamental en la economía del país, al proporcionar un mecanismo eficiente de transferencia de recursos a través de diversas modalidades como giros, cheques, transferencias bancarias y transacciones electrónicas, así como al facilitar la valoración de recursos financieros a lo largo del tiempo. Además, este sistema contribuye a la gestión del riesgo de incumplimiento de pago, abordando la asimetría de información entre deudores y acreedores mediante inversiones en distintos activos y la búsqueda de combinaciones óptimas de riesgo y rendimiento para mitigar los riesgos asociados a la falta de información completa sobre la situación económica de los deudores (Mayellis & Hidalgo, 2015).

1.11.3. Estructura del mercado de valores en Colombia

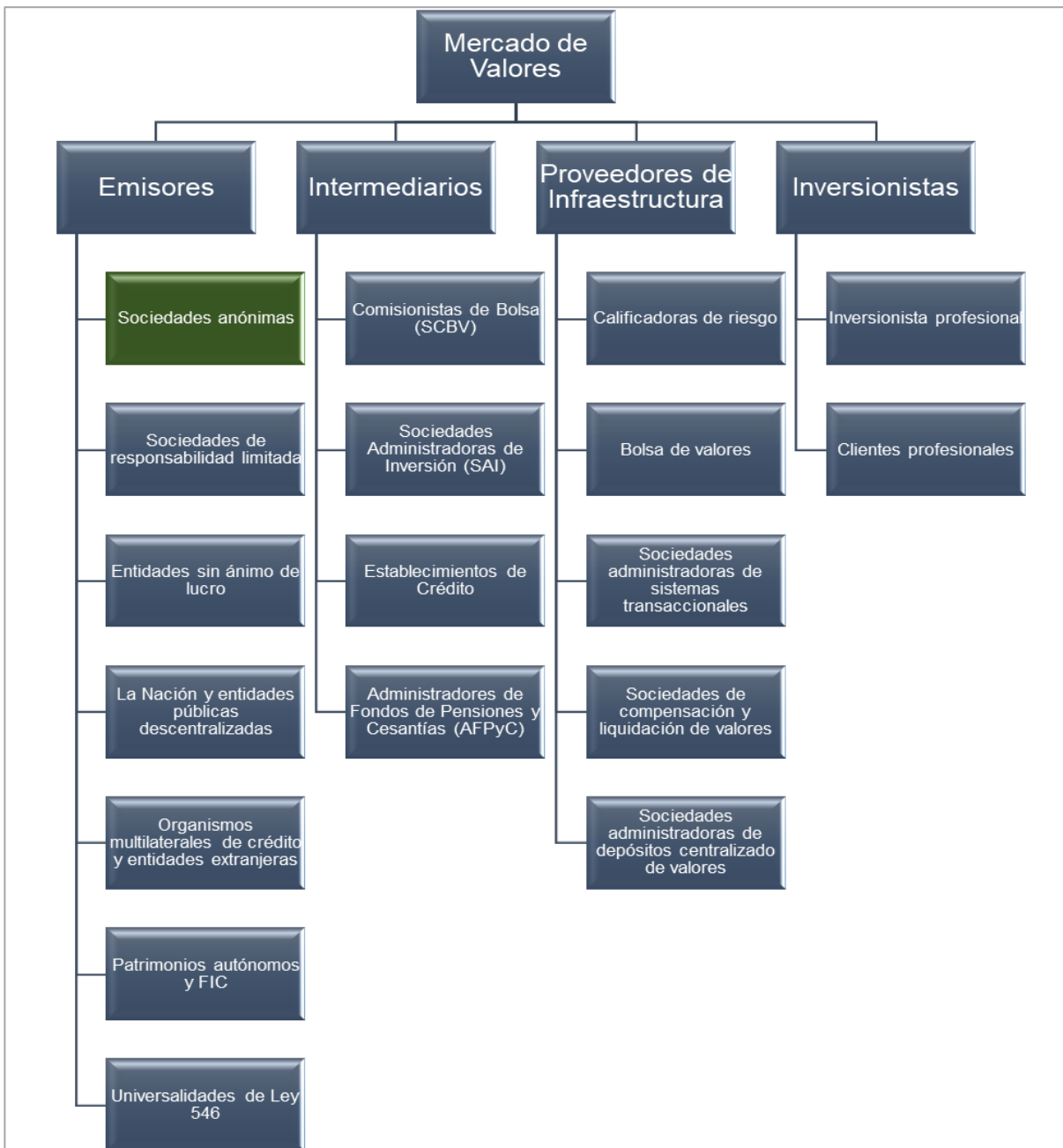
La evolución del mercado de capitales en Colombia abarca sus raíces y su estrategia de expansión a nivel nacional e internacional. A partir de 2003, el mercado de capitales colombiano comenzó a destacar en las estadísticas de la World Federation of Exchanges – WFE. Este crecimiento y consolidación se debe a avances económicos, tecnológicos y empresariales en el país (Cuartas, 2012).

El surgimiento de nuevos emisores, tanto locales como internacionales, en el mercado de renta fija y variable de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) ha fortalecido la democratización corporativa y la confianza de los inversionistas. Todo esto ha ocurrido en un entorno de seguridad jurídica y financiera, impulsado por acuerdos comerciales, lo que ha resultado en un aumento significativo del mercado de divisas operado en SET-FX de la BVC (Cuartas, 2012).

La estructura del Mercado de Valores en Colombia se puede visualizar en la siguiente imagen, donde se representa de manera gráfica la interacción entre los diferentes participantes y los flujos de transacciones que ocurren en este mercado.

Figura 6.

Estructura del Mercado de Valores en Colombia

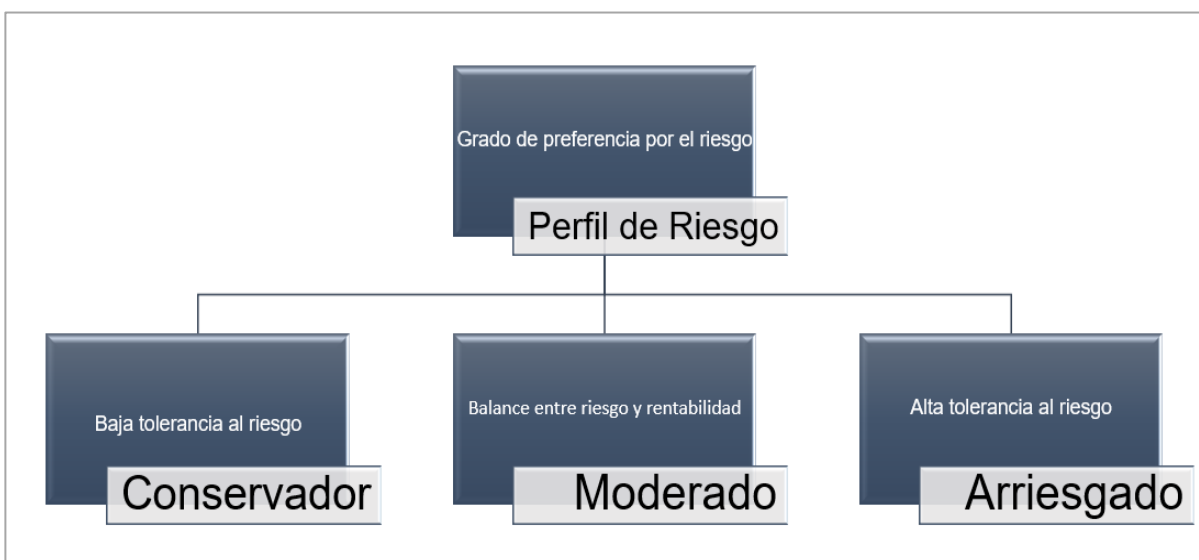


Nota. La figura representa la composición del mercado de valores subdividida en: Emisores, Intermediarios, Proveedores de Infraestructura e Inversionistas, se resalta en verde las sociedades anónimas porque son objeto de la investigación.

La Ley 964 de 2005 establece una lista de instrumentos de inversión que incluye acciones, bonos, papeles comerciales, entre otros. Sin embargo, la Superintendencia Financiera amplía el concepto de valor, considerando cualquier instrumento negociable utilizado para captar recursos del público. En esta investigación, se analizarán las acciones, que representan el capital de una sociedad anónima y son activos de renta variable cuyo valor se determina en el futuro. Su desempeño se ve afectado por factores como la valorización y los dividendos del emisor, así como por otros aspectos económicos. Antes de invertir en acciones, es esencial realizar un análisis tanto fundamental como técnico, además de considerar el perfil de riesgo del inversionista (Mayellis & Hidalgo, 2015). En la siguiente imagen se presentan los diferentes perfiles de riesgo a considerar.

Figura 7.

Perfiles de Riesgo



Nota. La figura representa la preferencia del inversor con respecto a su portafolio, es decir, su grado de aversión al riesgo, desde la mínima exposición o baja tolerancia hasta el grado más arriesgado.

2. MARCO METODOLÓGICO

2.1. Concepción del diseño de la investigación

El desarrollo de esta sección implica una exposición sistemática de los objetivos planteados en la investigación. En línea con esto y reconociendo la importancia de analizar datos financieros concretos, así como de aplicar métodos estadísticos robustos en la investigación, se ha adoptado un enfoque cuantitativo, el cual permitió evaluar de manera objetiva la eficacia de los métodos de estimación robusta en la optimización de portafolios.

Como lo destaca Gallardo en su manual autoformativo, este enfoque “También denominado tradicional, experimental, positivista, hipotético-deductivo, empiricista, empírico-analista o racionalista, surgió en el siglo XIX y tiene como fundamento filosófico el positivismo.” (Creswell, 1994; González-Morales, 2003 citado en Gallardo, 2017, p. 21). Y complementa la definición del enfoque cuantitativo con una reseña histórica “Hasta la mitad del siglo XX, ha sido el referente exclusivo dentro de la investigación.” (Sánchez-Santamaría, 2013 citado en Gallardo, 2017, p. 21).

A lo largo de la historia de la ciencia, han surgido diversas corrientes de pensamiento y marcos interpretativos que han abierto diferentes caminos en la búsqueda del conocimiento. Sin embargo, estas corrientes se han polarizado en dos enfoques principales de la investigación desde el siglo pasado: el enfoque cuantitativo y el enfoque cualitativo. Ambos enfoques emplean procesos cuidadosos, metódicos y empíricos para generar conocimiento, pero difieren en su enfoque y metodología. Por ejemplo, en el enfoque cuantitativo, se establecen hipótesis antes de definir y seleccionar la muestra, y la recolección y análisis de datos se lleva a cabo después de desarrollar el diseño de la investigación (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014).

Pese a lo anterior, ambos enfoques guardan una relación y se puede destacar que “...en términos generales, estos métodos utilizan cinco estrategias similares y relacionadas entre sí” (Grinnell, 1997, citado en Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014, p. 4).

- La primera estrategia presentada por el autor se refiere a que “Llevan a cabo la observación y evaluación de fenómenos.” (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014, p. 21).
- En segundo lugar “Establecen suposiciones o ideas como consecuencia de la observación y evaluación realizadas.” (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014, p. 21).
- La tercera estrategia es que “Demuestran el grado en que las suposiciones o ideas tienen fundamento.” (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014, p. 21).
- El cuarto punto resalta también que “Revisan tales suposiciones o ideas sobre la base de las pruebas o del análisis.” (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014, p. 21).
- Como última estrategia resalta que “Proponen nuevas observaciones y evaluaciones para esclarecer, modificar y fundamentar las suposiciones e ideas o incluso para generar otras.” (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014, p. 21).

Gallardo nos propone una tabla en la cual se presenta un resumen acerca de los criterios para la selección de los enfoques para el diseño de la investigación:

Figura 8.

Criteria para seleccionar un enfoque cuantitativo

Criteria	Paradigma cualitativo	Paradigma cuantitativo
La visión del investigador	La comodidad del investigador con los supuestos antológicos, epistemológicos, axiológicos, retóricos y metodológicos del paradigma cualitativo.	La comodidad del investigador con los supuestos antológicos, epistemológicos, axiológicos, retóricos y metodológicos del paradigma cuantitativo.
El entrenamiento y experiencia del investigador	Habilidades para la escritura literaria, habilidades para el uso de paquetes informáticos para el análisis de textos, habilidades para la consulta de material bibliográfico.	Habilidades para la escritura técnica, habilidades para el uso de paquetes informáticos estadísticos, habilidades para la consulta de material bibliográfico.
Atributos psicológicos del investigador	Comodidad con las reglas específicas y procedimientos para conducir el proceso de investigación, alta tolerancia frente a la ambigüedad.	Comodidad con las reglas y guías para conducir el proceso de investigación, poca tolerancia a la ambigüedad.
la naturaleza del problema	Estudios exploratorios; categorías desconocidas; importancia del contexto; posible falta de teoría base para el estudio.	Estudiado previamente por otros investigadores de manera que existe un cuerpo de literatura al respecto; variables conocidas; teorías existentes.
La audiencia del estudio (por ej. Editores de revistas académicas, comités de doctorado).	Individuos acostumbrados o partidarios de los estudios cualitativos.	Individuos acostumbrados o partidarios de los estudios cuantitativos.

Nota. Esta tabla muestra los criterios de selección de enfoques o paradigmas de investigación según los criterios propuestos en la teoría. **Fuente:** Gallardo, E. E. (2017). *Metodología de la Investigación. Manual autoformativo interactivo* (1.^a ed.). Universidad Continental. <http://www.continental.edu.pe/>.

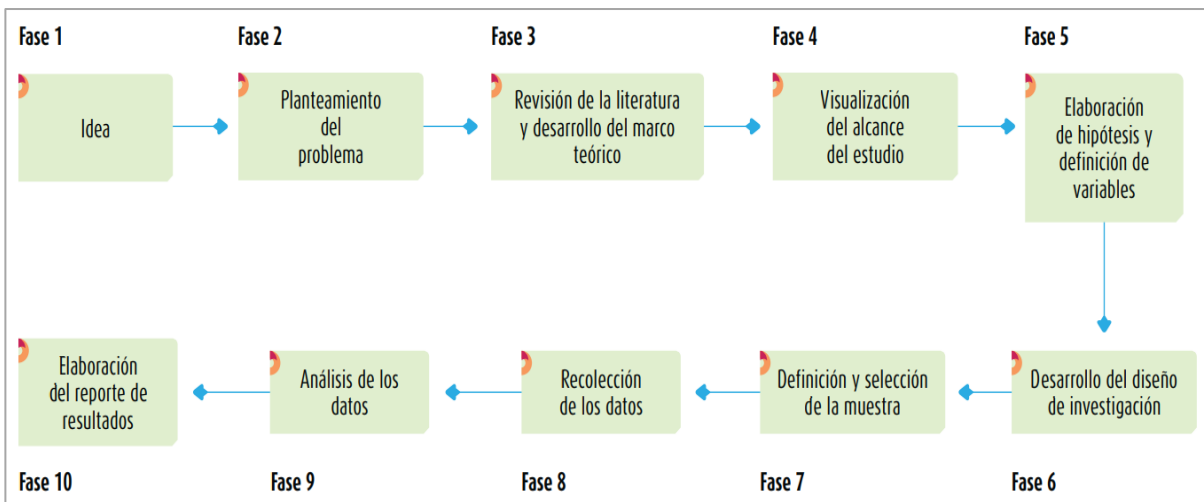
- a. Enfoque de la investigación. Basados en lo anteriormente descrito, en esta investigación se han seguido meticulosamente los cuatro criterios que respaldan la elección del enfoque cuantitativo: Inicialmente, al definir las preguntas de investigación, se formularon hipótesis y se determinaron las variables pertinentes para el estudio. Estas hipótesis se convirtieron en la base del diseño metodológico investigativo. Luego, se avanzó hacia la medición de las variables en un contexto específico.

Una vez que se recopilaron los datos, se lleva a cabo un análisis estadístico riguroso para examinar las relaciones y patrones identificados. Finalmente, a partir de los resultados obtenidos, se hicieron conclusiones bien fundamentadas que contribuyan significativamente a responder las preguntas de investigación planteadas inicialmente. Este enfoque secuencial y probatorio garantiza un proceso de investigación sólido y respaldado por evidencia empírica.

En resumen, la aplicación de estos criterios posibilita la realización de una investigación que sigue de manera rigurosa las distintas fases de un proceso de investigación con un enfoque cuantitativo. Con el objetivo de ofrecer una visión completa y detallada de todo este proceso, se presenta la siguiente figura.

Figura 9.

Fases del enfoque cuantitativo



Nota. Esta figura muestra las distintas fases de un proceso de investigación cuantitativa, desde la idea que es la fase 1 hasta la elaboración del reporte o informe de resultados que sería la última fase, la fase 10. **Fuente:** Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 6). <http://www.mhhe.com/he/hmi6e>.

2.1.1. Población y muestra

En el enfoque de selección de una muestra no probabilística, el proceso de elección no se rige por fórmulas matemáticas o aleatorias, sino que depende de la discreción y el juicio de los investigadores involucrados. En este método, se aplican criterios específicos que están directamente relacionados con los objetivos de la investigación y la naturaleza del estudio en cuestión (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014). En el caso de la selección de una muestra no probabilística, el proceso se basa en criterios específicos relacionados con el objeto de estudio: la serie de precios de las acciones de la Bolsa de Valores de Colombia.

- a. Definición de la Población. La población abarca la totalidad de los precios registrados de las acciones que cotizan en el mercado bursátil de Colombia. Estas acciones representan a las empresas enlistadas en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) y que han sido objeto de cotización durante su período de permanencia en la BVC.

Criterio de selección de la muestra: se decide utilizar un enfoque no probabilístico para seleccionar una muestra de precios de acciones que representen específicamente el comportamiento de las empresas más grandes en términos de bursatilidad. Este muestreo dirigido se basa en el siguiente criterio:

- La muestra de activos se seleccionó mediante el método de matriz de varianza y covarianza. El objetivo principal es identificar y elegir activos que presenten correlaciones negativas o cercanas a cero entre sí. Esta estrategia de selección se basa en la premisa de que la inclusión de activos negativamente correlacionados en un portafolio puede contribuir a la reducción del riesgo sistemático del mismo (AMV, 2019). El rango de correlación considerado para la inclusión en la muestra se encuentra en el intervalo $[-1, 0]$.
- b. Selección de la muestra. Se seleccionan deliberadamente las acciones de las empresas que cumplan con lo criterios mencionados, durante el período de estudio que comprende desde el 4 de enero de 2021 hasta el 29 de junio de 2023, es decir que, se tomaron para el análisis 627 observaciones que corresponden a los días hábiles bursátiles por cada año. Este enfoque se elige debido a la importancia que tiene el efecto correlación – diversificación en la constitución de un portafolio de inversión, desde el punto de vista de Markowitz este enfoque se centra en la distribución de inversiones a lo largo de diversas industrias, ya que las compañías pertenecientes a distintos sectores, especialmente aquellas con características económicas diversas, suelen exhibir covarianzas más bajas en comparación con las empresas que operan en un mismo sector (AMV, 2019).

Esta muestra no probabilística se basa en criterios específicos relacionados con el objeto de estudio y se elige con el propósito de enfocar la investigación en las acciones de las empresas más influyentes en el mercado bursátil colombiano.

2.1.2. *Recolección de datos*

- a. **Fuente de datos.** Los datos utilizados en este estudio fueron recopilados de la plataforma Yahoo! Finance. Esta fuente proporciona información financiera detallada y actualizada sobre los precios de las acciones de empresas que cotizan en el mercado bursátil colombiano, en particular en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC). Los datos abarcan un período de tiempo específico y se obtuvieron mediante consultas a las cotizaciones históricas disponibles. Esta plataforma se considera una fuente confiable y ampliamente utilizada para obtener datos financieros y de mercado en el ámbito de la inversión y las finanzas.

- b. **Identificación de empresas.** Bajo el criterio expuesto anteriormente, se aplicó el análisis de las varianzas y covarianzas de los precios de las acciones y se identificaron las siguientes empresas:

Figura 10.

Empresas seleccionadas como muestra

Nombre de la empresa	Código de Yahoo! Finance
Grupo Nutresa S. A.	(NUTRESA.CL)
Bancolombia S.A.	(BCOLOMBIA.CL)
Enka de Colombia S.A.	(ENKA.CL)
Construcciones El Condor S.A.	(ELCONDOR.CL)
BMC Bolsa Mercantil de Colombia S.A.	(BMC.CL)

Nota. Esta tabla presenta las empresas que resultaron tras aplicar la metodología de selección de la muestra representativa que cumplen con los requisitos necesarios para los objetivos del estudio.

- c. **Período de datos.** Se recopilan datos desde el 04 de enero de 2021 hasta el 29 de junio de 2023. Este período de 627 días bursátiles permite analizar la evolución de los precios de las acciones a lo largo de un período significativo.
- d. **Método de descarga.** Para la obtención de los datos, se aprovechó la interfaz proporcionada en el sitio web oficial de Yahoo! Finance. A través de esta, se pudo seleccionar en el listado de empresas, las entidades objeto de estudio y recuperar de forma precisa los precios diarios de las acciones. Este enfoque de descarga se eligió debido a su accesibilidad y fiabilidad para la obtención de las series financieras.
- e. **Calidad de datos.** Los datos descargados se sometieron a un proceso de revisión, donde se verificaron si estaban completos, en caso de que no, se usó el método de interpolación lineal¹ para obtenerlos (Würtz, Setz, Chalabi, & Lam, 2015). Además, se corrigieron errores de formato² con las herramientas ofimáticas disponibles³.
- f. **Almacenamiento de datos.** Los datos limpios y validados se almacenaron en el disco local del computador y en una nube de la cuenta institucional de la Universidad como respaldo en caso de algún incidente. Esto facilitó el acceso y la gestión de los datos a lo largo de la investigación con el software determinado.

2.1.3. Desarrollo del método clásico de optimización de portafolios de inversión

En el ámbito de las finanzas, es esencial entender dos componentes críticos para tomar decisiones de inversión informadas: el rendimiento y el riesgo. Se parte del principio de

¹ Es un método para estimar valores desconocidos de una función, basándose en dos puntos conocidos que están conectados por una línea recta. Esta línea se usa para predecir el valor de la función en cualquier punto intermedio y se deriva de la ecuación de la línea recta $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la intersección con el eje y .

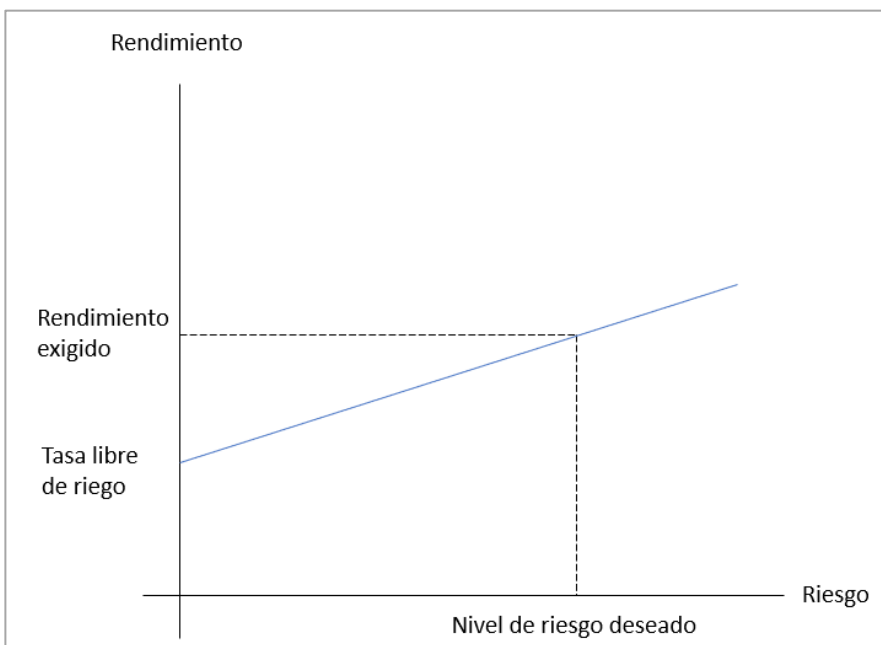
² Errores de formato que surgen en la extracción de información como fechas en formatos no aceptados en R (yyyy-mm-dd), comas por puntos, valores en blanco, entre otros.

³ Estas herramientas que ofrece la Suite de Office para Windows, para el caso particular se usó Excel.

que a un nivel más alto de riesgo en una inversión debe corresponderle la expectativa de un rendimiento más elevado (De Lara Haro, 2003).

Figura 11.

Relación entre el rendimiento y el riesgo



Nota. La imagen muestra un gráfico lineal típico utilizado en finanzas para ilustrar la relación entre el rendimiento y el riesgo de una inversión. En el eje vertical (Y) se mide el rendimiento, y en el eje horizontal (X) se mide el riesgo. La línea ascendente indica que a medida que el riesgo aumenta, el rendimiento exigido por la inversión también aumenta. Este concepto es una representación visual del principio financiero de que los inversores requieren retornos potenciales más altos para compensar mayores riesgos. **Fuente:** De Lara Haro, A. (2003). *Medición y control de riesgos financieros* (Noriega Editores, Ed.; 3.^a ed.). Limusa. https://www.academia.edu/23346886/Medicion_y_Control_de_Riesgos_Financieros Alfonso de Lara Haro.

Rendimiento: es el cambio de valor que registra un activo o portafolio en un periodo con respecto a su valor inicial, se puede definir en función del logaritmo de la razón (De Lara Haro, 2003).

$$R_i = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (E1)$$

Donde,

R_i : el rendimiento del activo i.

P_t : precio del activo en el tiempo t.

P_{t-1} : precio del activo en el tiempo t-1.

La rentabilidad de una cartera de inversiones se calcula tomando la media de los rendimientos individuales de todos los activos que la componen (De Lara Haro, 2003).

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (E2)$$

Donde,

R_p : rendimiento del portafolio.

w_i : peso del activo i.

R_i : el rendimiento del activo i.

La fluctuación o el grado de extensión desde el promedio se cuantifica en términos de la desviación estándar, que es simbolizada por la letra griega σ . En el contexto de una cartera de inversiones, el promedio de rendimiento es conocido como la media, y la desviación estándar se conoce como la volatilidad del portafolio.

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (E3)$$

$$\mu = \sum_{i=1}^n P_i R_i \quad (E4)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \mu)^2}{n - 1}} \quad (E5)$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i [R_i - \mu]^2} \quad (E6)$$

Donde,

P_i : probabilidad de ocurrencia

La covarianza se define como un indicador de la correlación lineal entre dos variables aleatorias, que refleja cómo estas varían juntas. Este concepto se puede aplicar para entender cómo se mueven en conjunto los rendimientos de los diferentes activos dentro de un portafolio (De Lara Haro, 2003). Se puede expresar así:

$$COV(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^n P_i [R_i - \mu_i] [R_j - \mu_j] \quad (E7)$$

Debido a que la magnitud de la covarianza puede ser complicada de interpretar, frecuentemente se prefiere usar el coeficiente de correlación para evaluar el grado de movimiento conjunto o la asociación lineal entre dos variables. La correlación varía entre -1 y +1 (De Lara Haro, 2003). Se calcula así:

$$Corr(R_i, R_j) = \rho_{ij} = \frac{COV(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} \quad (E8)$$

Donde,

ρ_{ij} : es la correlación entre los activos i y j.

$COV(R_i, R_j)$: es la covarianza entre los activos i y j.

σ_i : es la volatilidad del activo i.

σ_j : es la volatilidad del activo j.

Para un portafolio de n activos el instrumento clave es la matriz de varianza-covarianza. Esta matriz se caracteriza porque sus elementos en la diagonal principal están formados por las varianzas de cada variable, mientras que los elementos que no están en la

diagonal representan las covarianzas entre las variables (De Lara Haro, 2003). Esta matriz se representa así:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & COV(R_1, R_2) & \dots & COV(R_1, R_m) \\ COV(R_2, R_1) & \sigma_2^2 & \dots & COV(R_2, R_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ COV(R_n, R_1) & COV(R_n, R_2) & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (E9)$$

La matriz de correlación en este caso sería:

$$[c] = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (E10)$$

2.1.4. Elección de los métodos estadísticos robustos

Es ampliamente aceptado que en la práctica no se conocen las distribuciones de los rendimientos de los valores con precisión. Para llevar a cabo el modelo de portafolio de Markowitz en la práctica, es necesario estimar los valores medios y las varianzas utilizando datos de muestras pasadas (Zhang et al., 2018).

El mismo autor trae el concepto común sobre las desventajas del método de Markowitz, y en su investigación cita a diferentes autores, por un lado, Michaud en 1989 argumenta que los portafolios óptimos de MV a menudo resultan en maximización de errores. Del mismo modo, Best y Grauer en 1991 encuentran que los pesos de los portafolios de MV son altamente sensibles a cambios en el valor medio. Un estudio sostiene que la optimización de MV puede generar ponderaciones extremas o poco intuitivas para algunos de los valores en la selección del portafolio. También cita a Chopra (1993) que indica que incluso pequeñas modificaciones en las estimaciones de los valores medios o las varianzas pueden dar lugar a soluciones drásticamente diferentes en los portafolios óptimos de MV (Zhang et al., 2018).

Todos estos problemas se originan en los errores de estimación. Normalmente, las estimaciones de estos parámetros se utilizan como si fueran los valores de los parámetros reales, pasando por alto los errores inherentes a la estimación. Con el fin de reducir el impacto de los errores de estimación en las estimaciones de los valores medios y las varianzas, se han desarrollado modelos de selección de portafolios de MV más robustos mediante la aplicación de técnicas robustas de optimización (Zhang et al., 2018).

a. **Matriz de covarianza con determinante mínimo (MCD).** Como se explica en (Mayellis & Hidalgo, 2015), en 1984, Rousseeuw se enfrentó al desafío de proporcionar estimadores resistentes con una alta capacidad de adaptación ante datos atípicos. En respuesta a este problema, desarrolló el método estadístico conocido como la Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD, por sus siglas en inglés, Minimum Covariance Determinant). Este método se diseñó con el propósito de estimar los parámetros de localización y dispersión en datos multivariados, al mismo tiempo que identifica y trata los valores atípicos que puedan afectar la precisión de las estimaciones, ya sea en la estimación de la media o en la matriz de covarianzas.

“El propósito del método MCD es determinar una submuestra $(x_{i_1}, \dots, x_{i_h})$ de $h: (H_1, H_2, \dots, H_{(n h)})$ observaciones por medio de la matriz de covarianzas con el menor determinante, ...” (Mayellis & Hidalgo, 2015). El objetivo principal de esta selección es lograr que la matriz de covarianzas calculada a partir de esta submuestra tenga el menor determinante posible, además se expone lo siguiente, “... considerando las submuestras como un producto de todas las posibles permutaciones $(n h)$ de una misma combinación de los elementos extraídos de una muestra (x_1, \dots, x_2) compuesta por observaciones multivariantes p-dimensionales, ...” (Mayellis & Hidalgo, 2015). Estas combinaciones se obtienen mediante permutaciones de los elementos de la muestra original y, en conjunto, forman todas las submuestras posibles de tamaño h , también se explica la definición de p y h

“donde p es la dimensión de la matriz de correlación y el valor de h dependerá del máximo punto de ruptura”. El valor h se define de la siguiente forma:

$$h = [(n + p + 1)/2] \quad (E11)$$

Donde $[\cdot]$ indica la parte entera del cociente con $\frac{n}{2} \leq h \leq n$. Entre mayor sea el valor de h , más robusto es el estimador MCD (Hualpa Benavente, 2012 citado en Mayellis & Hidalgo, 2015).

“Una vez calculada h se estima el MCD para el vector de medias y la matriz de covarianzas tal como se procedería en el método clásico.” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 32). Por lo tanto, se podría decir que el MCD se utiliza como una herramienta de procesamiento preliminar para mejorar la robustez de las estimaciones de medias y covarianzas. “El promedio de las observaciones será el vector de medias que representa un estimador de localización T_{MCD} ...” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 32). Y se representa con la siguiente fórmula:

$$T_{MCD} = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h x_{ij}; j = (1, \dots, h) \quad (E12)$$

“La dispersión C_{MCD} es el producto entre la matriz de covarianzas multiplicada por un factor de corrección de consistencia C_{ccf} y por un factor de corrección para una muestra finita C_{ssf} ...” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 32), se escoge de tal forma que la C sea constante en el modelo normal. En este contexto, se está describiendo la manera en que se calcula la dispersión (variabilidad) en el método robusto MCD. La “dispersión C_{MCD} ” es el resultado de un cálculo que implica tres elementos:

1. La matriz de covarianzas: es una medida de cómo las variables en un conjunto de datos se relacionan entre sí en términos de dispersión.

2. Un factor de corrección de consistencia C_{ccf} : este factor se utiliza para mantener la consistencia del método y garantizar que la estimación sea adecuada en diferentes situaciones.
3. Un factor de corrección para una muestra finita C_{ssf} : este factor se aplica cuando se trabaja con muestras finitas en lugar de poblaciones infinitas, y ajusta la estimación en consecuencia.

El objetivo de estos cálculos es lograr que "C" (una constante) sea una medida confiable de la variabilidad en el contexto de un modelo multivariante normal. En resumen, se ajusta la matriz de covarianzas para que sea una medida constante de dispersión en el modelo normal multivariante, considerando la corrección y el tamaño de la muestra. Para lograr el C_{MCD} se utiliza la siguiente fórmula:

$$C_{MCD} = C_{ccf}C_{ssf} \frac{1}{h-1} \sum_{j=1}^h (x_{ij} - T_{MCD})(x_{ij} - T_{MCD})^t \quad (E13)$$

El procedimiento del Método Robusto de la Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD) implica la búsqueda exhaustiva de todos los subconjuntos de tamaño "h" en un conjunto de datos para identificar el subconjunto que tenga la matriz de covarianzas con el menor determinante. Sin embargo, este enfoque sería práctico solo para conjuntos de datos muy pequeños debido a la complejidad computacional de los algoritmos requeridos en el desarrollo del MCD (Mayellis & Hidalgo, 2015).

Según Mayellis & Hidalgo, (2015) para abordar este desafío, en 1999, Rousseeu y Van Driessen propusieron el algoritmo FAST-MCD. Este método se ha convertido en una elección ampliamente utilizada debido a sus características destacadas:

- “Es un estimador robusto, incluso si se trata de tolerar una gran cantidad de datos atípicos”. (Berrendero Díaz, 1996, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 33).

- “Sus propiedades asintóticas permiten que sea comparado con otros estimadores que poseen altos puntos de ruptura”. (Backhoff Veraguas, 2010, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 33).
- “Detecta fácilmente datos atípicos multivariantes”. (Backhoff Veraguas, 2010, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 33).
- “Es eficiente en términos de tiempo computacional”. (Rodríguez, 2005, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 33).
- “Es aplicable a datos atípicos univariados y multivariados” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 33).
- “Actualmente existen software adecuados para desarrollar el método, como R – Project...” (Mayellis & Hidalgo, 2015, p. 33).

El algoritmo FAST – MCD se basa en la búsqueda de la matriz de covarianza concentrada con el determinante más bajo, donde la concentración está representada por λ . De esta manera en 1999, Rousseeuw y Van Driessen demostraron mediante un teorema que el proceso iterativo para encontrar el valor de λ converge en un número finito de pasos. Este proceso de convergencia se acerca al mínimo local más próximo al mínimo global, ya que al ejecutar el Método Robusto de la Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo (MCD), no se puede garantizar que se alcance el mínimo global (Mayellis & Hidalgo, 2015).

b. Elipsoide de Mínimo Volumen (MVE). En el método estadístico clásico, se representa todo el conjunto de datos mediante una nube de puntos con forma elipsoidal, donde es posible encontrar un punto central representado por $T(x)$. Esto permite calcular la distancia de Mahalanobis, para identificar valores atípicos multivariantes presentes, como se ha descrito en la obra de (Rousseeuw y Van Zomeren, 1990, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015).

En la estimación de la matriz de covarianzas, $T(x)$ y $C(x)$ son variables equivariantes afines cuando se cumple con las siguiente dos funciones (Leroy & Rousseeuw, 1987;

Rousseeuw & Van Zomeren, 1990; Lopuhaä & Rousseeuw, 1991, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015):

$$C(x_1A + b, \dots, x_nA + B) = T(x_1, \dots, x_n)A + b \quad (E14)$$

Donde:

A: cualquier matriz invertible de p – por – p.

B: cualquier vector.

$$T(xA + b, \dots, x_nA + b) = T(x_1, \dots, x_n)A + b \quad (E15)$$

Dado que los métodos clásicos se ven afectados por la presencia de datos atípicos, esto provoca que los cálculos de $T(x)$ y $C(x)$ sean susceptibles a su influencia. Los valores de $T(x)$ se verán atraídos por estos datos atípicos, mientras que $C(x)$ se contraerá en su dirección, como se señala en el estudio de (Rousseeuw y Van Zomeren, 1990, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015).

Según (Rousseeuw y Van Zomeren, 1990, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015), una vez que se identifican los datos típicos o "buenos", estos se pueden utilizar en los métodos clásicos para las estimaciones finales de la media y la covarianza. El enfoque MVE (Minimum Volume Ellipsoid), permite la robustez de estas estimaciones al reemplazar los valores en la función por estimadores robustos MVE. Un dato se considera atípico si supera un punto de corte predefinido. Además, los estimadores deben minimizar la siguiente función: (Rousseeuw & Van Zomeren, 1990; Lopuhaä & Rousseeuw, 1991, citado en Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$\left\{ i; \left(\underline{x}_i - T(x) \right) C(x)^{-1} \left(T(x) \right)^t \leq a^2 \right\} \geq h \quad (E16)$$

Donde:

a^2 : constante elegida como $X_p^2.50$ cuando se espera que la mayoría de los datos provengan de una distribución normal. En caso de que la muestra sea pequeña se debe tomar el factor $C_{n,p}^2$. h : cobertura o submuestras aleatorias.

Desde una muestra con distribución normal (x_1, \dots, x_n) , integrada por n puntos multivariados y de variada dimensión p distribuidos en una formación elipsoidal, se extraen submuestras h . Estas submuestras consisten en lo que Rousseeuw y Van Zomeren en 1990 denominaron Conjuntos Elementales $p + 1$. De esta forma, se contempla la totalidad de los Conjuntos Elementales posibles $\binom{n}{p+1}$ (Mayellis & Hidalgo, 2015).

Para cada h , se determina tanto la media ponderada T_{MVE} como la matriz de covarianza ponderada C_{MVE} . Estos cálculos estadísticos conforman un elipsoide, el cual tiene la capacidad de expandirse o contraerse con el fin de abarcar de manera precisa las h seleccionadas (Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$T_{MVE1} = \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i \quad (E17)$$

Donde el peso de $w_i = w(dmVE_i)$ depende de las distancias robustas.

La posición del Mínimo Volumen Elipsoidal (MVE) se establece mediante T_{MVE} , situada en el núcleo del elipsoide de volumen más reducido, el cual debe incluir al menos el 50% de la fracción de datos no alterados (x_1, \dots, x_n) . Por consiguiente, para cumplir con esta condición, h debe ajustarse a la siguiente fórmula propuesta por Leroy y Rousseeuw en 1987 (Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$h = \frac{n}{2} + 1 \quad (E18)$$

La variabilidad dentro del Mínimo Volumen Elipsoidal (MVE) se caracteriza mediante una matriz de covarianza C_{MVE} definida positiva en forma elipsoidal, la cual se ajusta mediante un factor de corrección para asegurar la consistencia con una distribución normal, según lo establecido por Rousseeuw en 1985, y corroborado por Agulló Candela en 1997 (Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$C_{MVE1} = \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - T_{MVE1})^t (\bar{x}_i - T_{MVE1}) \quad (E19)$$

En la quinta sección de su estudio, Lopuhaä y Rousseeuw en 1991 evidenciaron que el punto de quiebre para T_{MVE0} y C_{MVE0} coincide con el de T_{MVE1} y C_{MVE1} en situaciones donde la función de peso w disminuye considerablemente en presencia de un $dMVE_i$ elevado. La conservación del punto de quiebre de las estimaciones iniciales ofrece la ventaja de que el modelo es capaz de retener un punto de quiebre alto sin sacrificar su eficiencia (Mayellis & Hidalgo, 2015).

Para simplificar el cálculo de las variables equivariantes afines, Leroy y Rousseeuw en 1987 desarrollaron el Algoritmo de Remuestreo. Este algoritmo se distingue por enfocarse en la selección de datos típicos en lugar de datos atípicos y depende de permutaciones variables de, lo cual implica que cualquier reordenamiento de resultará en alteraciones en h (Mayellis & Hidalgo, 2015).

Por medio de submuestras de diferentes observaciones $p + 1$, indexadas por $J = (i_1, \dots, i_{p+1})$ se calculan la media T_j y la matriz de covarianza C_j (Mayellis & Hidalgo, 2015)

$$T_j = \frac{1}{p+1} \sum_J x_i \quad (E20)$$

$$C_j = \frac{1}{p} \sum_J (x_i - T_{jX})^t (x_i - T_j) \quad (E21)$$

El elipsoide necesita ajustar su tamaño, ya sea expandiéndose o contrayéndose, para englobar precisamente h . Por tanto, es necesario realizar cálculos iterativos de la expresión (E22), y para esta tarea se sugiere utilizar equipos informáticos (Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$m_j^2 = \left\{ (x_i - T_j) C_j^{-1} (x_i - T_j)^t \right\}_{h:n} \quad (E22)$$

Donde:

m_j^2 : factor de ampliación derecho. El volumen cuadrado del elipsoide resultante es proporcional a $m_j^{2p} : \det(C_j)$, de este cómputo se toma sólo el valor más pequeño. Para este J se computan (E23) y (E24) (Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$T_{MVE} = T_j \quad (E23)$$

$$C_{MVE} = (X_{p,.50}^2)^{-1} C_{n,p}^2 m_j^2 C_j \quad (E24)$$

Después de calculadas T_{MVE} y C_{MVE} se sustituye en $dMVE_i$ para obtener la distancia Mahalanobis MVE (Mayellis & Hidalgo, 2015).

$$dMVE_i = \sqrt{(x_i - T_{MVE}) C_{MVE}^{-1} (x_i - T_{MVE})^t} \quad (E25)$$

3. RESULTADOS

3.1 Análisis de datos

El proceso de análisis de datos y su posterior interpretación son dos etapas esenciales en la investigación, interconectadas pero distintas en su enfoque. El análisis de datos implica descomponer la información en sus elementos fundamentales para abordar preguntas específicas formuladas en el estudio. En contraste, la interpretación requiere una reflexión intelectual profunda con el propósito de desvelar significados más amplios dentro de los datos recopilados (Gallardo, 2017). En esta sección, ampliaremos nuestro enfoque en el análisis de datos; sin embargo, antes de sumergirnos en ello, exploramos la elección del software que se utilizará para llevar a cabo el procesamiento y análisis de datos.

Existen varios programas para llevar a cabo el análisis de datos, y en esencia, todos siguen una estructura similar que consta de dos componentes principales. El primer componente se enfoca en definir las variables, proporcionando explicaciones detalladas sobre los datos, incluyendo la codificación de ítem por ítem o indicador por indicador. Esta parte es crucial para comprender la segunda componente: la matriz de datos. Las definiciones de variables suelen ser preparadas por el investigador (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014).

Una vez que se han recopilado los datos, el investigador debe especificar los parámetros de la matriz de datos en el programa, lo que incluye el nombre de cada variable en la matriz (equivalente a un ítem, indicador, categoría o subcategoría de contenido u observación), el tipo de variable o ítem, el ancho en dígitos, entre otros aspectos. Luego, se ingresan los datos en la matriz, que se asemeja a una hoja de cálculo típica. La matriz de datos consta de columnas (variables, ítems o indicadores), filas o renglones (casos) y celdas (intersecciones entre una columna y un renglón), y cada celda contiene un dato, representando el valor de un caso en una variable específica (Fernández Collado & Baptista Lucio, 2014).

El software que se escogió para desarrollar el procesamiento y análisis de datos fue R, y según (Würtz, Setz, Chalabi, Chen, et al., 2015), R es un sistema avanzado de cómputo estadístico con gráficos de alta calidad que está disponible de forma gratuita para muchas plataformas informáticas. Puede descargarse desde el servidor CRAN (repositorio central) y se distribuye bajo la Licencia Pública General de GNU. El proyecto R fue iniciado por Ross Ihaka y Robert Gentleman en la Universidad de Auckland. El sistema base de R se ve enormemente mejorado por medio de paquetes de extensión y proporciona un intérprete dirigido por una línea de comandos para el lenguaje S. El dialecto admitido es muy similar al implementado en S-Plus. R es un sistema avanzado y ofrece métodos de vanguardia y potentes para casi todas las aplicaciones en estadísticas.

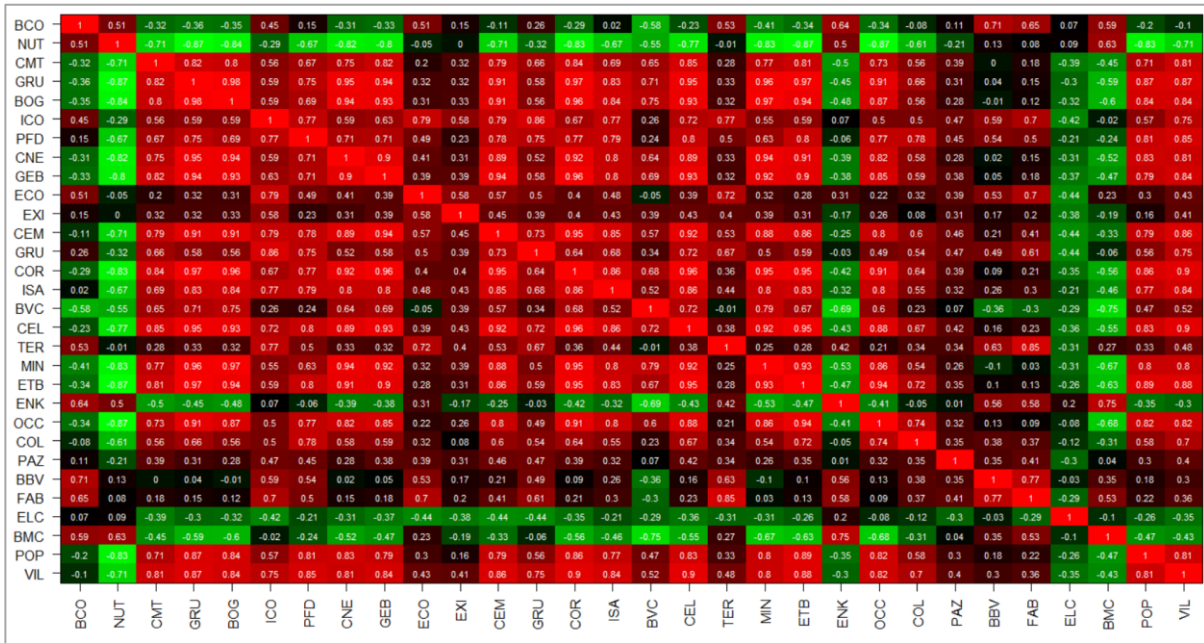
Específicamente se utiliza una librería para el análisis de portafolio que pertenece a Rmetrics y en la serie de eBooks de R/Rmetrics se puede ubicar la definición de las librerías. Rmetrics representa una solución integral y confiable para quienes trabajan en finanzas y requieren capacidades avanzadas de análisis y modelado. Su amplia gama de funciones y su disponibilidad en diferentes plataformas hacen que sea una opción valiosa para abordar los desafíos financieros modernos de manera efectiva y eficiente (Würtz, Setz, Chalabi, Chen, et al., 2015).

3.1.1 Análisis de las correlaciones de las empresas listadas en la BVC

Mediante la implementación del método de correlación de Pearson, se identificaron aquellas empresas cuya correlación se encuentra en el rango de $[-1, 0]$. Esta selección estratégica busca maximizar la diversificación y, consecuentemente, minimizar el riesgo sistémico inherente a los portafolios de inversión. La gráfica subsiguiente ilustra con claridad las correlaciones de las empresas registradas en la BVC:

Figura 12.

Matriz de correlación de las empresas listadas en bolsa



Nota. Este gráfico representa el mapa de calor de la matriz de correlación de los precios de cierre de las acciones. Cada celda muestra la correlación entre dos acciones específicas: los colores rojos representan correlaciones positivas, cuanto más claro es el rojo, más fuerte es la correlación positiva. Los colores verdes representan correlaciones negativas, cuanto más claro es el verde, más fuerte es la correlación negativa. Un valor de 1 o -1 representa una correlación perfecta positiva o negativa, respectivamente. Un valor de 0 indica que no hay correlación.

Según este método, las empresas seleccionadas para la conformación del portafolio son: Grupo Nutresa S. A. (NUTRESA.CL), Bancolombia S.A. (BCOLOMBIA.CL), Enka de Colombia S.A. (ENKA.CL), Construcciones El Condor S.A. (ELCONDOR.CL), BMC Bolsa Mercantil de Colombia S.A. (BMC.CL) y en el desarrollo del documento se puede mencionar la empresa por su nombre o por su código.

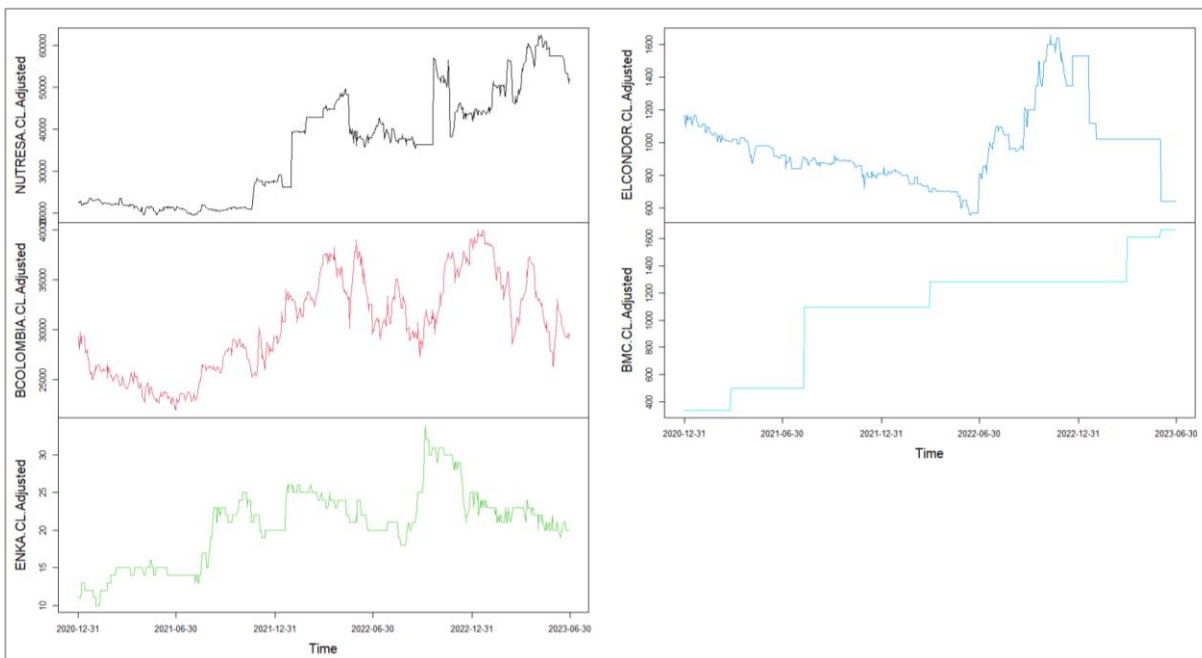
3.1.2. Análisis de los precios y retornos diarios

A partir de la interpretación gráfica, un portafolio conformado por estas acciones garantiza diversificación. Esto no solo se refleja en las distintas tendencias observadas, sino también en la diversidad sectorial de las empresas representadas, abarcando desde

el sector financiero y bienes de consumo hasta materiales básicos e industria en el sector económico de Colombia. Es particularmente destacable la volatilidad de acciones como BOLOMBIA.CL, lo que podría señalar un incremento en el riesgo, pero también en el potencial de rendimiento.

Figura 13.

Gráficas de la evolución de los precios de las acciones



Nota. Los gráficos muestran la evolución de precios de diversas acciones desde principio de 2021 hasta mediados de 2023. En el eje Y se refleja el valor de la acción, mientras que el eje X se indica el tiempo. Líneas ascendentes representan aumentos en el precio, y oscilaciones bruscas señalan volatilidad. Al comparar gráficos, se puede discernir el desempeño relativo de las acciones y evaluar la diversificación.

- Grupo Nutresa S. A. (NUTRESA.CL): la evolución del precio de esta acción a largo plazo sugiere una tendencia al alza con algunas fluctuaciones significativas en ciertos puntos.
- Bancolombia S.A. (BCOLOMBIA.CL): durante el segundo semestre de 2021, se observa una recuperación en el precio de la acción, evidenciando un crecimiento consistente hasta concluir el primer semestre de 2022. Posterior a este período,

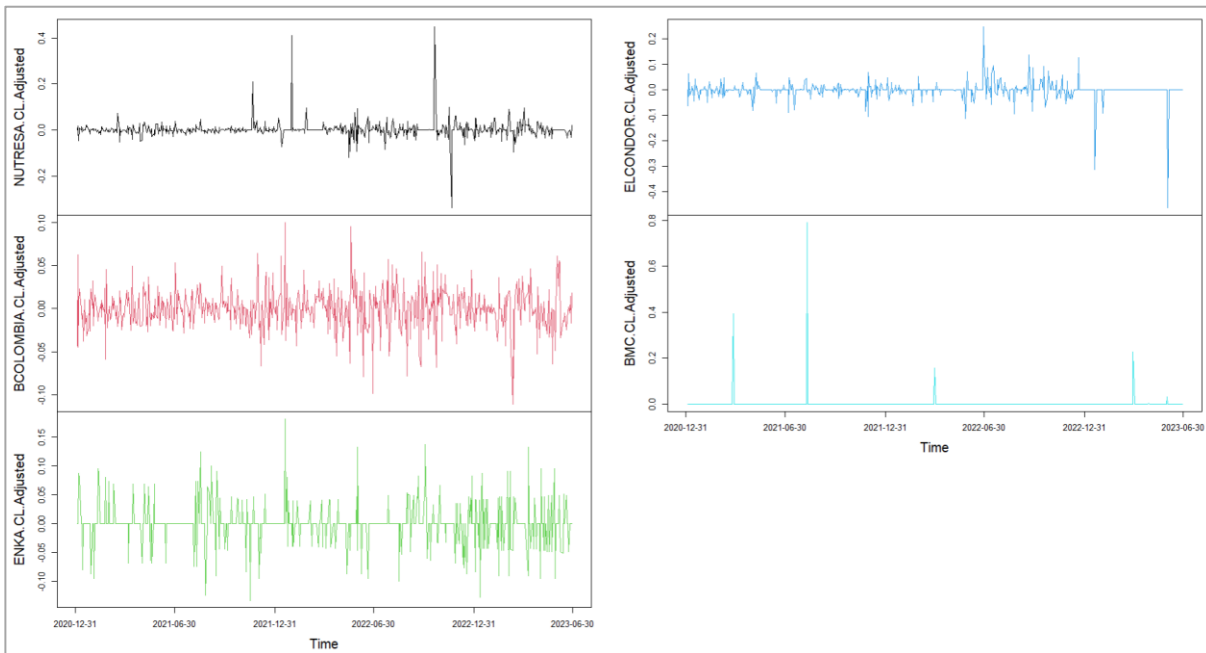
la acción experimenta una volatilidad marcada, sin discernir una tendencia clara y sostenida.

- Enka de Colombia S.A. (ENKA.CL): esta acción ha mostrado una tendencia al alza durante todo el período. Aunque ha habido algunas fluctuaciones, en general, el precio ha aumentado con el tiempo.
- Construcciones El Cóndor S.A. (ELCONDOR.CL): hasta la conclusión del primer semestre de 2022, la acción evidenciaba una tendencia decreciente en su valor. No obstante, en el siguiente semestre y al cierre del año, experimentó una notable recuperación. A pesar de esto, durante 2023, el valor de la acción retomó una trayectoria descendente sostenida.
- BMC Bolsa Mercantil de Colombia S.A. (BMC.CL): se observa un período de estabilidad seguido de un aumento significativo en el precio, que luego se estabiliza nuevamente en un nivel más alto.

En cuanto a los retornos de estas acciones, que se calculan como logaritmos de las diferencias diarias de los precios, se destaca una diversidad en la volatilidad y comportamiento a lo largo del período analizado. Mientras acciones como NUTRESA.CL ofrecen una estabilidad relativa, otras como BCOLOMBIA.CL presentan un alto grado de imprevisibilidad. Estas variaciones subrayan la relevancia de diversificar un portafolio para mitigar el riesgo. Las acciones volátiles pueden brindar la oportunidad de altos retornos, pero también implican un riesgo mayor. Para los inversores, es crucial reconocer estos patrones y seleccionar acciones que concuerden con su perfil y tolerancia al riesgo.

Figura 14.

Histórico de los retornos de las acciones

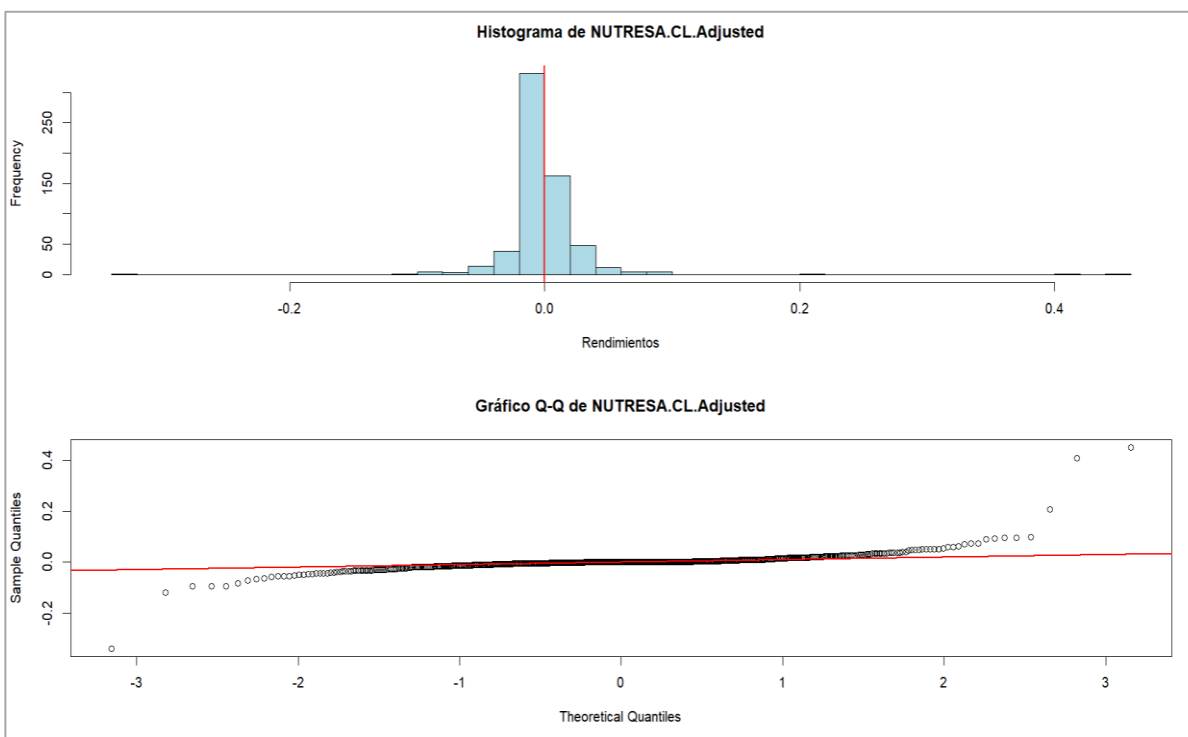


Nota. El presente conjunto de gráficos ilustra los retornos diarios de las acciones. En el eje Y, se visualizan los retornos, los cuales pueden ser positivos (ganancias) o negativos (pérdidas). El eje X, por su parte, marca el paso del tiempo. Oscilaciones pronunciadas indican días con mayor volatilidad en el retorno, y una densidad de líneas en una dirección sugiere tendencias de alza o baja.

La observación de picos en la representación gráfica es una señal de la presencia de valores extremos en el conjunto de datos. Estos valores, ya sean de magnitud positiva o negativa, llevan a una reflexión sobre la existencia de datos atípicos. Estos datos, aunque pueden ser percibidos como insignificantes a primera vista, tienen el potencial de sesgar los resultados, especialmente cuando se trata de formar carteras de inversión utilizando el método de Varianza Mínima (MV). Además, estos valores extremos plantean interrogantes sobre la validez del supuesto de que los rendimientos siguen una distribución normal. Esta cuestión es importante, pues si se demuestra que los rendimientos no son normalmente distribuidos, se abre la puerta a la aplicación de técnicas de estadística robusta, que son menos sensibles a los valores atípicos y, por lo tanto, pueden ofrecer una interpretación más precisa de los datos.

Figura 15.

Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de Nutresa

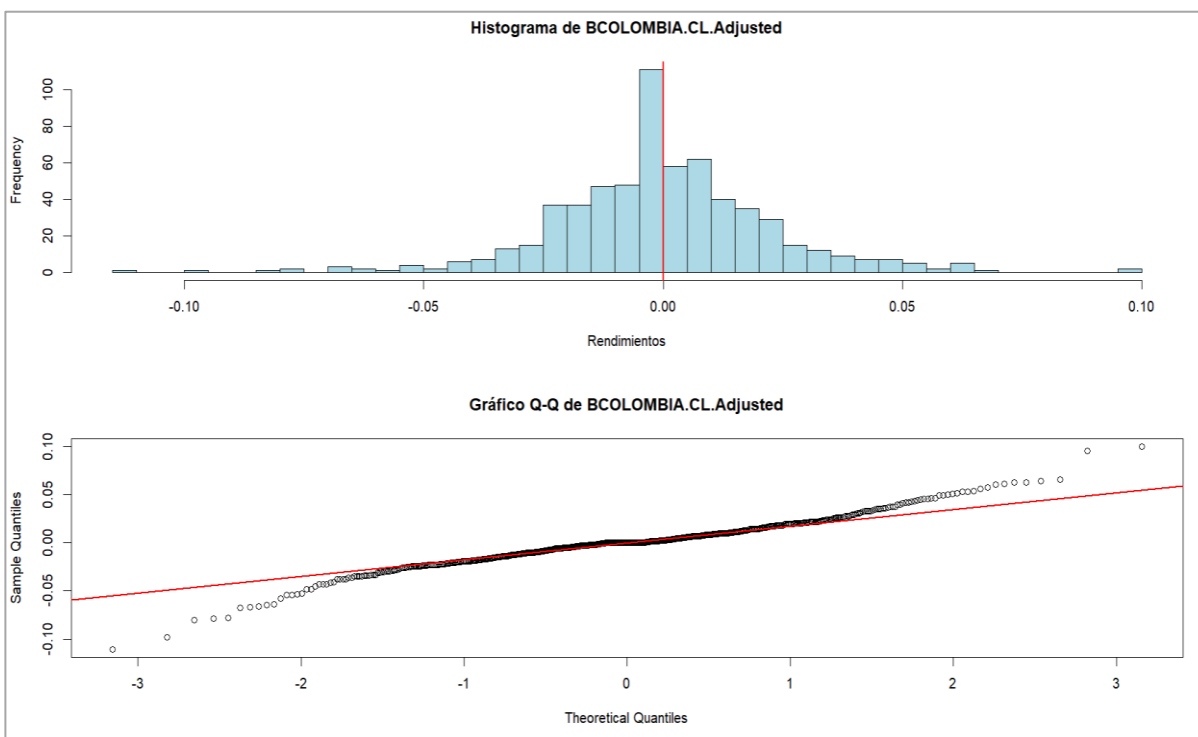


Nota. El histograma representa gráficamente la distribución de los retornos de las acciones, donde el eje X muestra los diferentes niveles de retorno y el eje Y su frecuencia. Una forma simétrica indica que los retornos pueden seguir una distribución normal. El gráfico Q-Q, por su parte, compara la distribución de estos retornos con una distribución teórica normal. Si los puntos se alinean con la línea roja, sugiere que los retornos se distribuyen normalmente. Desviaciones, especialmente en los extremos, indican posibles anomalías en la distribución. Ambas visualizaciones ofrecen perspectivas valiosas y deben interpretarse conjuntamente para una mejor comprensión.

Según el histograma, los retornos muestran una distribución que se asemeja a una forma normal, pero con colas más pesadas. Esta observación es respaldada por el gráfico Q-Q, donde se ve que los rendimientos extremos son más comunes de lo que se esperaría bajo una distribución normal. Estas desviaciones de la normalidad, especialmente la presencia de colas pesadas, son importantes al considerar el riesgo financiero, ya que sugieren que hay una probabilidad mayor de obtener rendimientos extremadamente altos o bajos en comparación con lo que se esperaría bajo una distribución normal.

Figura 16.

Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de Bancolombia



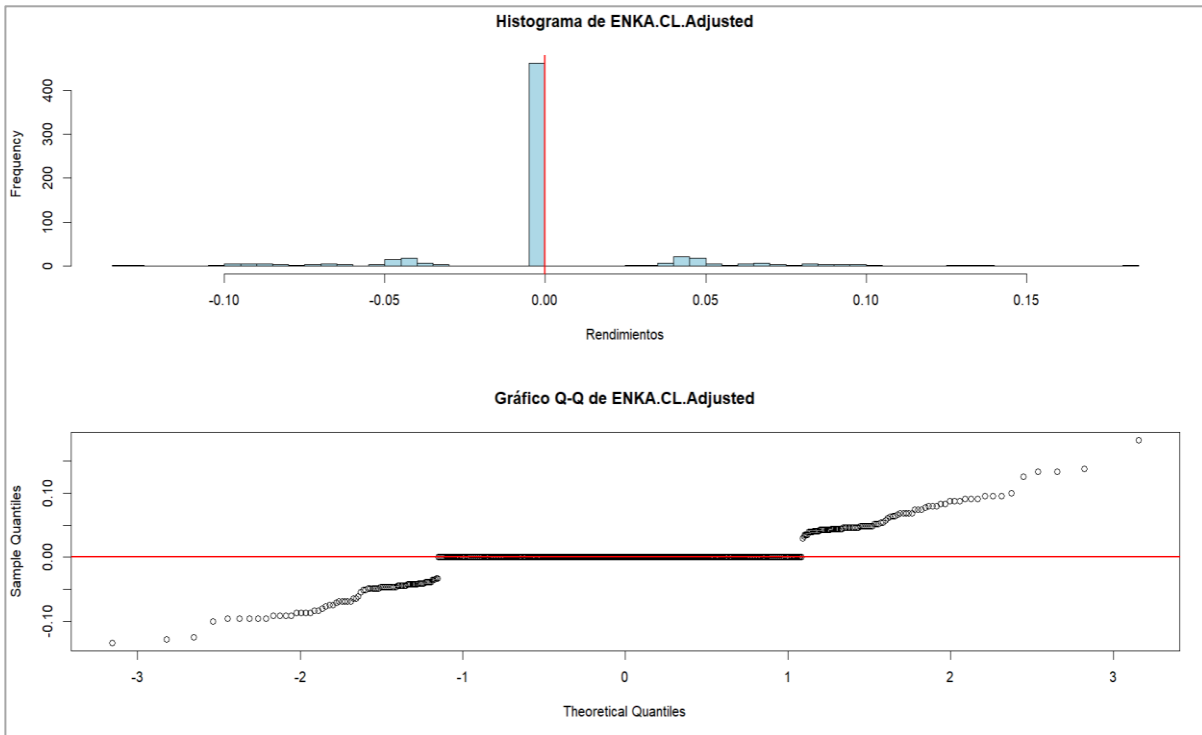
Nota. El histograma representa gráficamente la distribución de los retornos de las acciones, donde el eje X muestra los diferentes niveles de retorno y el eje Y su frecuencia. Una forma simétrica indica que los retornos pueden seguir una distribución normal. El gráfico Q-Q, por su parte, compara la distribución de estos retornos con una distribución teórica normal. Si los puntos se alinean con la línea roja, sugiere que los retornos se distribuyen normalmente. Desviaciones, especialmente en los extremos, indican posibles anomalías en la distribución. Ambas visualizaciones ofrecen perspectivas valiosas y deben interpretarse conjuntamente para una mejor comprensión.

Los retornos de BCOLOMBIA.CL, de acuerdo con el histograma y el gráfico Q-Q, sugieren que la distribución de los retornos tiene ciertas características que se desvían de la normalidad, en particular, las colas más pesadas o leptocúrticas. Esto indica que hay una probabilidad más alta de rendimientos extremos, ya sean positivos o negativos, en comparación con una distribución normal estándar. Estas características deben ser consideradas al evaluar el riesgo y al tomar decisiones de inversión relacionadas con BCOLOMBIA.CL, ya que sugieren que hay un mayor potencial de movimientos de

precios extremos en comparación con lo que se esperaría bajo la suposición de normalidad.

Figura 17.

Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de ENKA



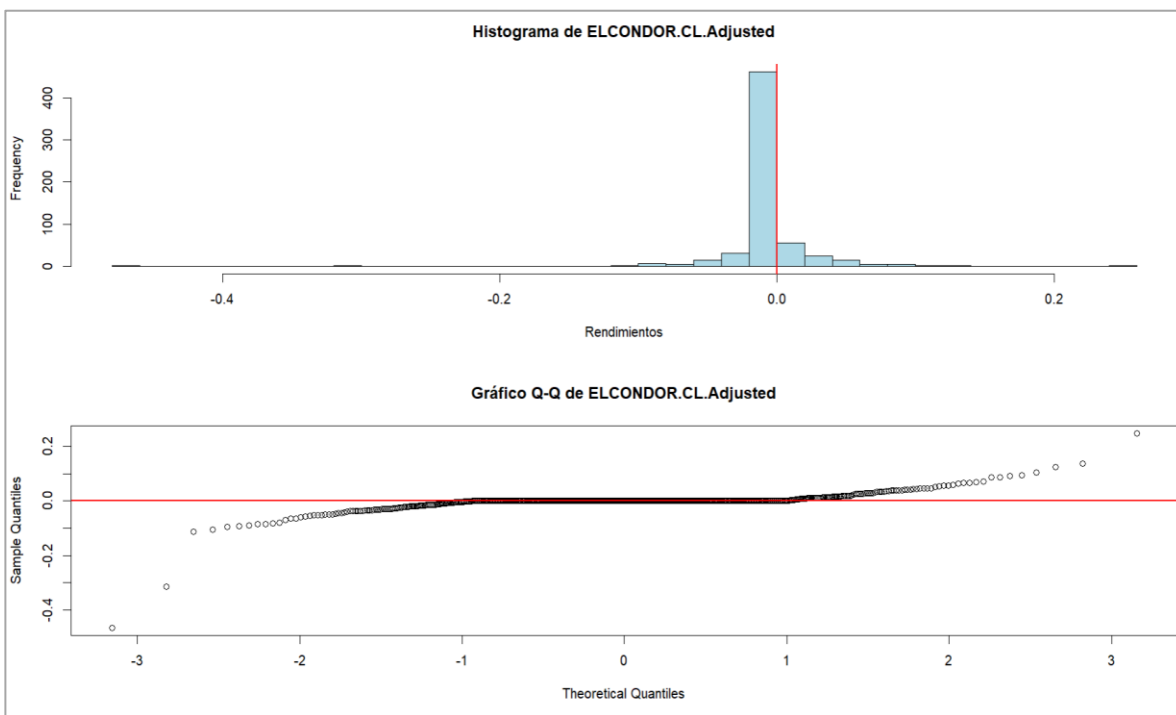
Nota. El histograma representa gráficamente la distribución de los retornos de las acciones, donde el eje X muestra los diferentes niveles de retorno y el eje Y su frecuencia. Una forma simétrica indica que los retornos pueden seguir una distribución normal. El gráfico Q-Q, por su parte, compara la distribución de estos retornos con una distribución teórica normal. Si los puntos se alinean con la línea roja, sugiere que los retornos se distribuyen normalmente. Desviaciones, especialmente en los extremos, indican posibles anomalías en la distribución. Ambas visualizaciones ofrecen perspectivas valiosas y deben interpretarse conjuntamente para una mejor comprensión.

Los retornos de ENKA, según el histograma y el gráfico Q-Q, muestran características que se alejan significativamente de la normalidad. La distribución de los retornos tiene barras pronunciadas y huecos notables en el histograma, lo que indica que hay días con retornos muy específicos y extremos, tanto positivos como negativos. Además, el gráfico Q-Q evidencia la presencia de colas pesadas, sugiriendo un mayor potencial de

movimientos de precios extremos. Estas observaciones implican que los inversores deben ser cautelosos al evaluar el riesgo asociado a ENKA, ya que presenta una dinámica de rendimientos que puede no seguir un patrón estándar y tener eventos de precios inesperados con mayor frecuencia.

Figura 18.

Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de ELCONDOR.CL



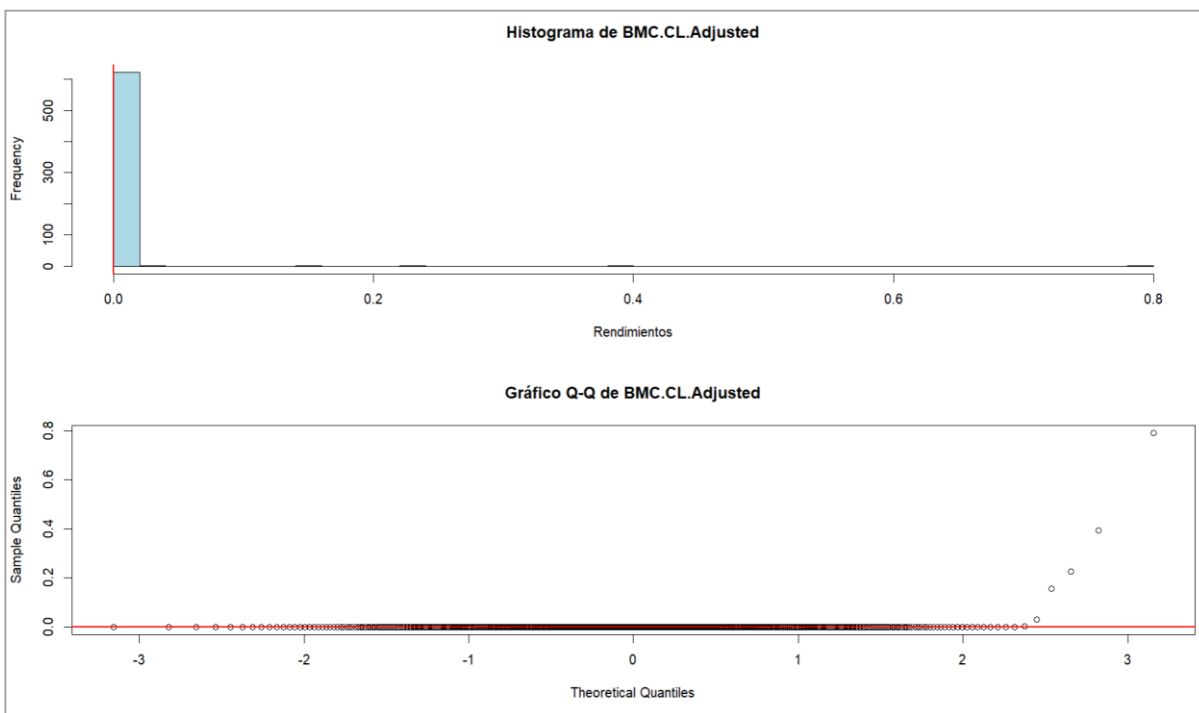
Nota. El histograma representa gráficamente la distribución de los retornos de las acciones, donde el eje X muestra los diferentes niveles de retorno y el eje Y su frecuencia. Una forma simétrica indica que los retornos pueden seguir una distribución normal. El gráfico Q-Q, por su parte, compara la distribución de estos retornos con una distribución teórica normal. Si los puntos se alinean con la línea roja, sugiere que los retornos se distribuyen normalmente. Desviaciones, especialmente en los extremos, indican posibles anomalías en la distribución. Ambas visualizaciones ofrecen perspectivas valiosas y deben interpretarse conjuntamente para una mejor comprensión.

Los retornos de ELCONDOR.CL parecen seguir de manera bastante cercana una distribución normal, según lo evidenciado en el histograma y en gran parte del gráfico Q-Q. Sin embargo, las desviaciones en los extremos del gráfico Q-Q sugieren que hay una

posibilidad, aunque menor, de movimientos extremos en los precios, superiores a los que se esperarían de una distribución normal. Esta característica implica que, aunque en general los retornos de ELCONDOR.CL pueden considerarse moderados, aún existe el potencial de sorpresas en el mercado.

Figura 19.

Histograma y gráfico Q-Q de los retornos de BMC.CL



Nota. El histograma representa gráficamente la distribución de los retornos de las acciones, donde el eje X muestra los diferentes niveles de retorno y el eje Y su frecuencia. Una forma simétrica indica que los retornos pueden seguir una distribución normal. El gráfico Q-Q, por su parte, compara la distribución de estos retornos con una distribución teórica normal. Si los puntos se alinean con la línea roja, sugiere que los retornos se distribuyen normalmente. Desviaciones, especialmente en los extremos, indican posibles anomalías en la distribución. Ambas visualizaciones ofrecen perspectivas valiosas y deben interpretarse conjuntamente para una mejor comprensión.

Los retornos de BMC.CL tienen una distribución muy concentrada, con la mayoría de los rendimientos agrupados cerca del cero, según lo evidenciado en el histograma. El gráfico Q-Q sugiere que la distribución de los retornos no es normal, ya que hay una notable

desviación de la línea teórica. Estas observaciones apuntan a que BMC.CL presenta una volatilidad muy baja y pocas fluctuaciones en sus retornos diarios.

Mientras que las herramientas visuales proporcionan una intuición inicial sobre la distribución de los datos, la prueba de Shapiro-Wilk ofrece una confirmación cuantitativa y objetiva. Usar ambos en conjunto asegura no solo confiar en las percepciones visuales, sino también tener una base estadística sólida para las conclusiones sobre la normalidad de los datos. Al aplicar la prueba sobre los retornos calculados obtenemos lo siguiente:

- Planteamiento de hipótesis:

H_0 : los rendimientos se distribuyen normalmente

H_1 : los rendimientos no se distribuyen normalmente

- Resultados de la prueba:

Shapiro-Wilk normality test

data: Base_precios.ret

W = 0.50431, p-value < 2.2e-16

- Interpretación:

Valor W: es 0.50431, este valor está en el rango [0, 1]. Cuanto más cerca esté W de 1, más se asemejará la distribución de la muestra a una distribución normal. Un valor de W de 0.50431 sugiere una desviación significativa de la normalidad.

Valor p: es extremadamente pequeño, específicamente menor que 2.2e-16 (que es una notación para representar un valor muy cercano a cero). En la mayoría de los análisis estadísticos, un valor p por debajo de 0.05 generalmente se considera evidencia para rechazar la hipótesis nula.

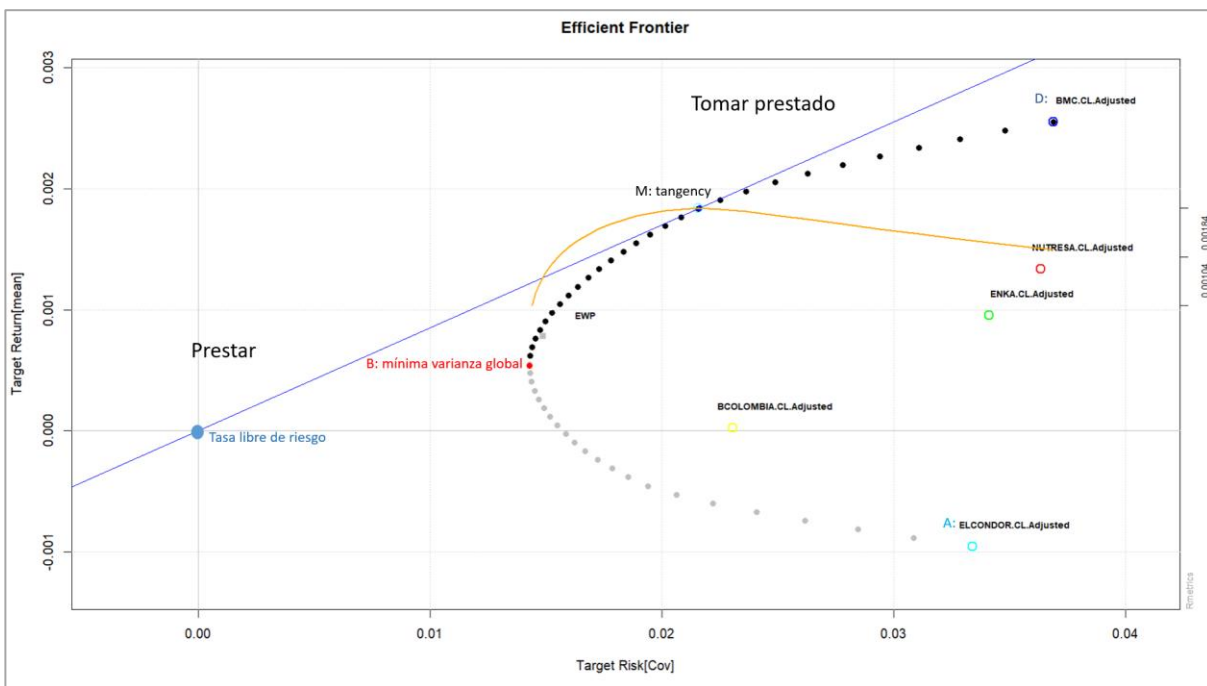
Conclusión de la prueba: la prueba arrojó un p-valor muy pequeño, específicamente menor que 2.2e-16. El valor p es menor que el nivel de significancia preestablecido (como 0.05), por lo tanto, con un nivel de confianza del 95%, se rechaza la hipótesis nula. En

este caso, la hipótesis nula para la prueba de Shapiro-Wilk es que los datos siguen una distribución normal.

3.1.3. Análisis del portafolio de mínima varianza con el método clásico.

Figura 20.

Frontera eficiente con el método clásico



Nota. La gráfica muestra la Frontera Eficiente de portafolios de solo posiciones largas, mapeando el riesgo (volatilidad) en el eje horizontal contra el rendimiento esperado en el vertical. Cada punto en la curva representa un portafolio óptimo. La línea de tangencia con la tasa libre de riesgo cero destaca el portafolio de tangencia que maximiza el coeficiente de Sharpe, es decir, el rendimiento ajustado por riesgo. Incluye también el portafolio de pesos iguales (EWP) y la posición de activos individuales, ofreciendo una guía visual para la selección de portafolios basada en el equilibrio entre riesgo y retorno.

En el análisis de los portafolios calculados, el Portafolio B se destaca como la opción de mínima varianza global, preferida por inversores con aversión al riesgo. Invertir todo el capital en un solo activo, como NUTRESA.CL, ENKA.CL, BCOLOMBIA.CL o ELCONDOR.CL, se considera ineficiente, dado que algunos de ellos se ubican por

debajo del Portafolio B y están fuera de la frontera eficiente. El Portafolio M, conocido como el Portafolio de Tangencia, se utiliza como guía para construir portafolios personalizados, ajustando la proporción entre la inversión sin riesgo y el portafolio de mercado según el apetito de riesgo del inversor. Por último, el Portafolio D implica invertir el 100% del capital en la acción BMC.CL, lo que conlleva el mayor nivel de riesgo posible.

Figura 21.

Resultados del modelo MV Global método clásico

Title:	MV Minimum Variance Portfolio			
Estimator:	covEstimator			
Solver:	solveRquadprog			
Optimize:	minRisk			
Constraints:	LongOnly			
Portfolio Weights:				
NUTRESA.CL.Adjusted	BCOLOMBIA.CL.Adjusted	ENKA.CL.Adjusted	ELCONDOR.CL.Adjusted	BMC.CL.Adjusted
0,1571	0,3456	0,1375	0,2083	0,1514
Target Returns and Risks:				
Mean	Cov	Cvar	VaR	
0,0005	0,0143	0,0308	0,0192	

Nota. La figura muestra la configuración de la aplicación del método correspondiente en el programa de R y los resultados de la ejecución que son el Portfolio Weights y el Target Returns and Risks.

- Configuración del Modelo: “MV Minimum Variance Portfolio” se refiere a que este portafolio ha sido optimizado para tener la menor varianza y, por lo tanto, el riesgo posible.
- Estimator: “covEstimator” indica que se ha utilizado un estimador de covarianza para calcular las relaciones de riesgo entre los activos.
- Solver: “solveRquadprog” sugiere que el algoritmo utilizado para resolver la optimización es el método de programación cuadrática de R.
- Optimize: “minRisk” confirma que el objetivo de la optimización era minimizar el riesgo.
- Constraints: “LongOnly” significa que la optimización está sujeta a la restricción de que solo se pueden tomar posiciones largas en activos, es decir, no se permiten ventas en corto.

a. Pesos en el portafolio:

- Portfolio Weights: los pesos del portafolio reflejan la distribución estratégica del capital entre los activos seleccionados, siendo fundamentales para entender la composición del portafolio de mínima varianza global. En esta configuración, se asignaría un 15.71% del capital a NUTRESA.CL. Por otro lado, BCOLOMBIA.CL recibiría la mayor asignación con un 34.56%, reflejando una preferencia por su perfil de riesgo-rendimiento. ENKA.CL y BMC.CL tienen asignaciones más moderadas, con un 13.75% y un 15.14% respectivamente, lo que indica una postura de diversificación. ELCONDOR.CL ocupa también una porción considerable, con un 20.83%, completando así la estructura del portafolio que busca minimizar el riesgo global a través de una distribución equilibrada de las inversiones.

b. Retornos y Riesgos Objetivo:

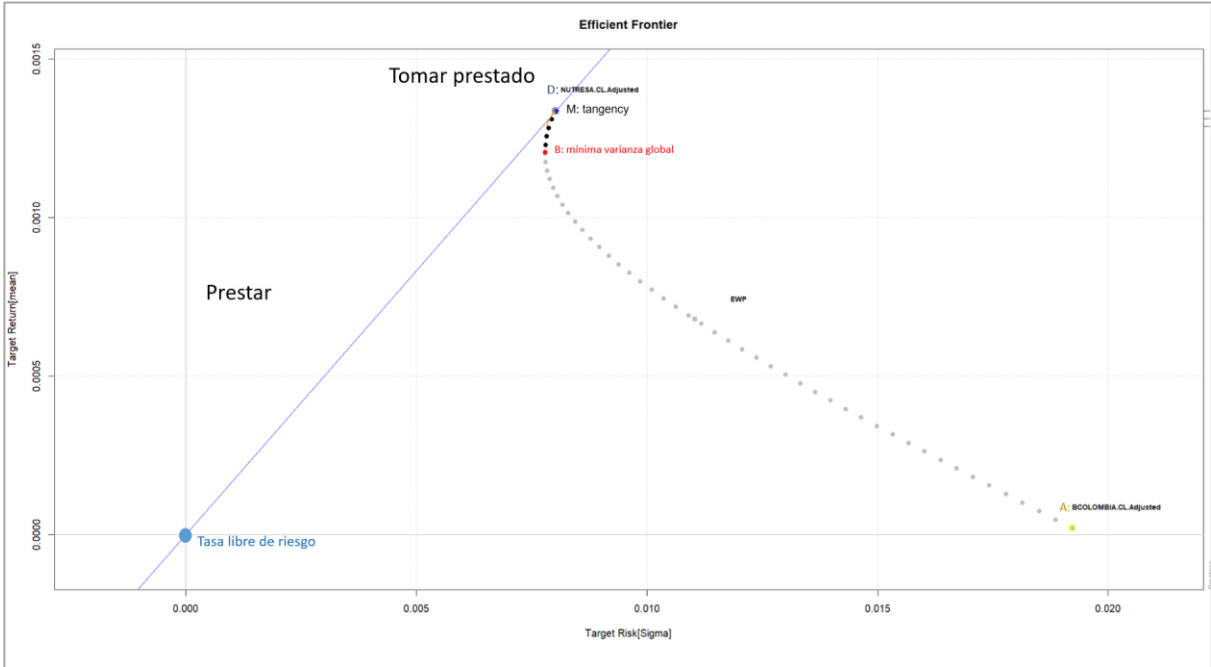
- Mean: el rendimiento medio esperado del portafolio. En este caso, es 0,0005, o un 0.05%.
- Cov: representa la varianza (o volatilidad cuadrada) del portafolio. Un valor de 0,0143 sugiere una variabilidad moderada del portafolio.
- Cvar: es el Valor en Riesgo Condicional (CvaR), que mide el riesgo de pérdidas extremas. Aquí es 0,0308 o un 3,08%, indicando el promedio de las peores pérdidas esperadas.
- VaR: el Valor en Riesgo (VaR), que indica el nivel de pérdida que no se espera superar con una cierta confianza. Un VaR de 0,0192 sugiere que hay una confianza del 95% de que las pérdidas no excederán el 1.92% del valor del portafolio en el período de tiempo establecido.

3.1.4. Análisis del portafolio de mínima varianza con el método de la Matriz de Covarianza con Determinante Mínimo MCD

El cálculo de la matriz de covarianza utilizando el método MCD se realiza mediante la función covMCDestimator, que forma parte de la biblioteca Rmetrics. Esta función lleva a cabo internamente los cálculos necesarios para obtener la matriz de covarianza utilizando el enfoque del determinante mínimo. Estos cálculos siguen los procesos teóricos previamente explicados en la sección correspondiente a este método en el marco metodológico.

Figura 22.

Frontera eficiente con el método MCD



Nota. La gráfica muestra la Frontera Eficiente de portafolios de solo posiciones largas, mapeando el riesgo (volatilidad) en el eje horizontal contra el rendimiento esperado en el vertical. Cada punto en la curva representa un portafolio óptimo. La línea de tangencia con la tasa libre de riesgo cero destaca el portafolio de tangencia que maximiza el coeficiente de Sharpe, es decir, el rendimiento ajustado por riesgo. Incluye también el portafolio de pesos iguales (EWP) y la posición de activos individuales, ofreciendo una guía visual para la selección de portafolios basada en el equilibrio entre riesgo y retorno.

Los resultados en relación con los puntos específicos D y A sugiere una reflexión sobre la diversificación y la correlación. Las acciones individuales, cuando se combinan en un portafolio, pueden ofrecer beneficios de diversificación que no son inmediatamente evidentes al mirar su desempeño de forma aislada.

La acción de NUTRESA.CL se destaca por su retorno esperado, sobresaliendo individualmente en el portafolio. No obstante, su contribución al equilibrio global de riesgo y retorno podría ser limitada, como sugiere su posición por encima del punto de mínima varianza. Esto podría interpretarse como un exceso de optimismo del mercado hacia Nutresa o señalar una potencial oportunidad de arbitraje si existen informaciones no reflejadas en su precio actual.

BCOLOMBIA.CL se presenta como una alternativa más conservadora en el portafolio, reflejando un retorno más moderado acorde con su menor nivel de riesgo. Situado cerca de la base de la frontera eficiente en el punto "A", este activo manifiesta un perfil de retorno ajustado por riesgo que no alcanza el óptimo del portafolio de mínima varianza. Esto sugiere que, aunque BCOLOMBIA.CL aporta estabilidad al portafolio, su contribución a la eficiencia global del mismo en términos de la relación riesgo – retorno podría no ser la ideal bajo las circunstancias actuales.

Figura 23.

Resultados del modelo MV Global método MCD

Title:	MV Minimum Variance Portfolio		
Estimator:	fastCovMcdEstimator		
Solver:	solveRquadprog		
Optimize:	minRisk		
Constraints:	LongOnly		
Portfolio Weights:			
NUTRESA.CL.Adjusted	BCOLOMBIA.CL.Adjusted		
0,8982	0,1018		
Target Returns and Risks:			
Mu	Sigma	Cvar	VaR
0,0012	0,0077	0,0582	0,0303

Nota. La figura muestra la configuración de la aplicación del método correspondiente en el programa de R y los resultados de la ejecución que son el Portfolio Weights y el Target Returns and Risks.

- Configuración del Modelo: “MV Minimum Variance Portfolio” se refiere a que este portafolio ha sido optimizado para tener la menor varianza y por lo tanto, el menor riesgo posible.
- Estimator: “fastCovMcdEstimator” se utilizó un estimador rápido de la matriz de covarianza basado en MCD para estimar la matriz de covarianza entre los activos.
- Solver: “solveRquadprog” sugiere que el algoritmo utilizado para resolver la optimización es el método de programación cuadrática de R.
- Optimize: “minRisk” confirma que el objetivo de la optimización era minimizar el riesgo.
- Constraints: “LongOnly” significa que la optimización está sujeta a la restricción de que solo se pueden tomar posiciones largas en activos, es decir, no se permiten ventas en corto.

a. Pesos del Portafolio:

- NUTRESA.CL: 89.82% del capital se asigna a las acciones de Nutresa.
- BCOLOMBIA.CL: 10.18% del capital se asigna a las acciones de Bancolombia.

Esto indica una fuerte inclinación hacia Nutresa.CL, sugiriendo que, bajo el criterio de mínima varianza, se considera que tiene un perfil de riesgo más bajo o una mejor correlación con el otro activo para minimizar la varianza del portafolio.

b. Retornos y Riesgos Objetivo:

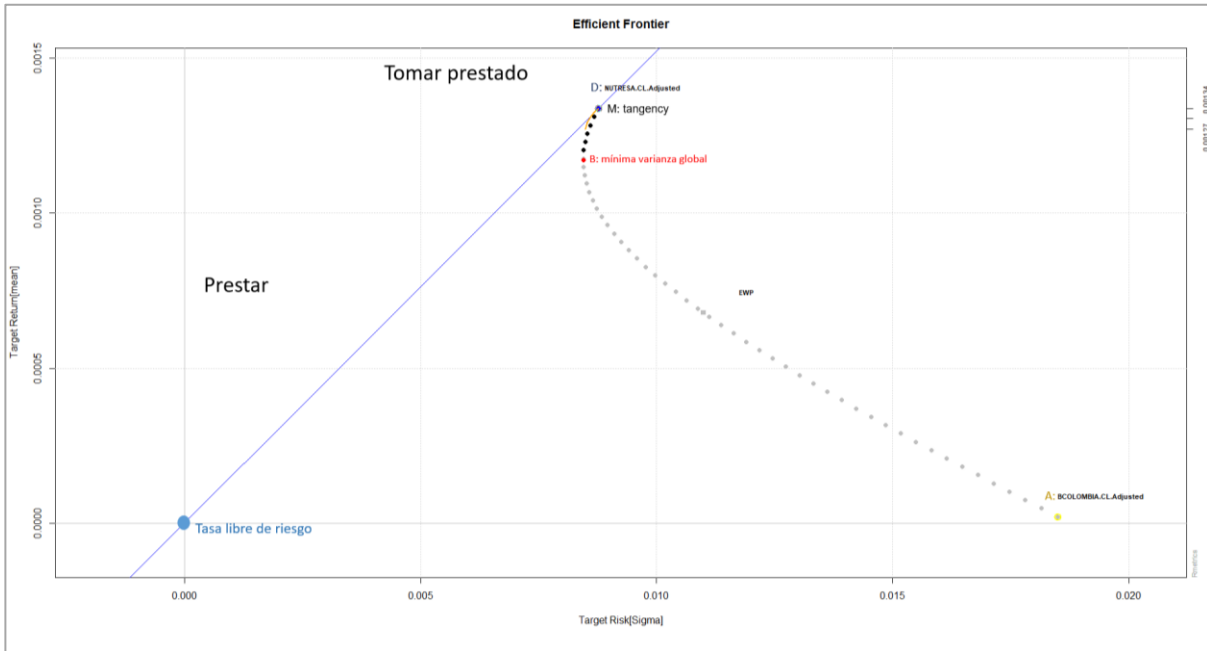
- Mu (Retorno esperado): 0.12% es el retorno esperado del portafolio. Este es bastante bajo, reflejando la naturaleza conservadora del portafolio de mínima varianza.
- Sigma (Riesgo): 0.77% es la volatilidad estimada del portafolio, lo cual es bastante bajo, confirmando el objetivo de minimizar el riesgo.
- Cvar (Valor en Riesgo Condicional): 5.82% es el valor en riesgo condicional, una medida que estima la pérdida máxima esperada bajo un cierto nivel de confianza, dado que se supera el valor en riesgo (VaR).
- VaR (Valor en Riesgo): 3.03% representa la pérdida máxima esperada con un nivel de confianza determinado durante el período especificado.

3.1.5 Análisis del portafolio de mínima varianza con el método del Elipsoide de Mínimo Volumen

Para implementar el método MVE, se utiliza el comando `mveEstimator` en el entorno de programación R. Este comando se aplica a los rendimientos ya calculados, identificados como "Base_precios_EMV.ret". El uso de `mveEstimator` es particularmente adecuado en este contexto dado que permite identificar la matriz de covarianza más pequeña posible que cubre la mayoría de los datos, minimizando la influencia de los valores atípicos y proporcionando una visión más precisa y resistente de las relaciones subyacentes en los datos de rendimiento.

Figura 24.

Frontera eficiente con el método MVE



Nota. La gráfica muestra la Frontera Eficiente de portafolios de solo posiciones largas, mapeando el riesgo (volatilidad) en el eje horizontal contra el rendimiento esperado en el vertical. Cada punto en la curva representa un portafolio óptimo. La línea de tangencia con la tasa libre de riesgo cero destaca el portafolio de tangencia que maximiza el coeficiente de Sharpe, es decir, el rendimiento ajustado por riesgo. Incluye también el portafolio de pesos iguales (EWP) y la posición de activos individuales, ofreciendo una guía visual para la selección de portafolios basada en el equilibrio entre riesgo y retorno.

Los resultados que se pueden observar en el gráfico son muy similares al análisis anterior que se obtuvo con el método MCD, esto debido a que, proporcionan resultados similares para la estimación de la frontera eficiente de carteras de inversión. Ambos métodos son robustos a la presencia de datos atípicos, se continúa con el uso de ambos métodos para confirmar los resultados y reducir el riesgo de sesgos.

Figura 25.

Resultados del modelo MV Global método MVE

Title:	MV Minimum Variance Portfolio		
Estimator:	fastMveEstimator		
Solver:	solveRquadprog		
Optimize:	minRisk		
Constraints:	LongOnly		
Portfolio Weights:			
NUTRESA.CL.Adjusted	BCOLOMBIA.CL.Adjusted		
0,8759	0,1241		
Target Returns and Risks:			
Mu	Sigma	Cvar	VaR
0,0012	0,0084	0,0571	0,0297

Nota. La figura muestra la configuración de la aplicación del método correspondiente en el programa de R y los resultados de la ejecución que son el Portfolio Weights y el Target Returns and Risks.

- Configuración del Modelo: “MV Minimum Variance Portfolio” se refiere a que este portafolio ha sido optimizado para tener la menor varianza (y por lo tanto, el riesgo) posible.
- Estimator: “fastMveEstimator” se utilizó un estimador rápido de la matriz de covarianza basado en MVE para estimar la matriz de covarianza entre los activos.
- Solver: “solveRquadprog” sugiere que el algoritmo utilizado para resolver la optimización es el método de programación cuadrática de R.
- Optimize: “minRisk” confirma que el objetivo de la optimización era minimizar el riesgo.
- Constraints: “LongOnly” significa que la optimización está sujeta a la restricción de que solo se pueden tomar posiciones largas en activos, es decir, no se permiten ventas en corto.

a. Pesos del Portafolio:

Muestra la distribución de los pesos del portafolio en dos activos, con NUTRESA.CL constituyendo el 87.59% del portafolio y BCOLOMBIA.CL el

12.41%. Esta distribución refleja la combinación de activos que minimiza el riesgo según el modelo.

b. Retornos y Riesgos Objetivo:

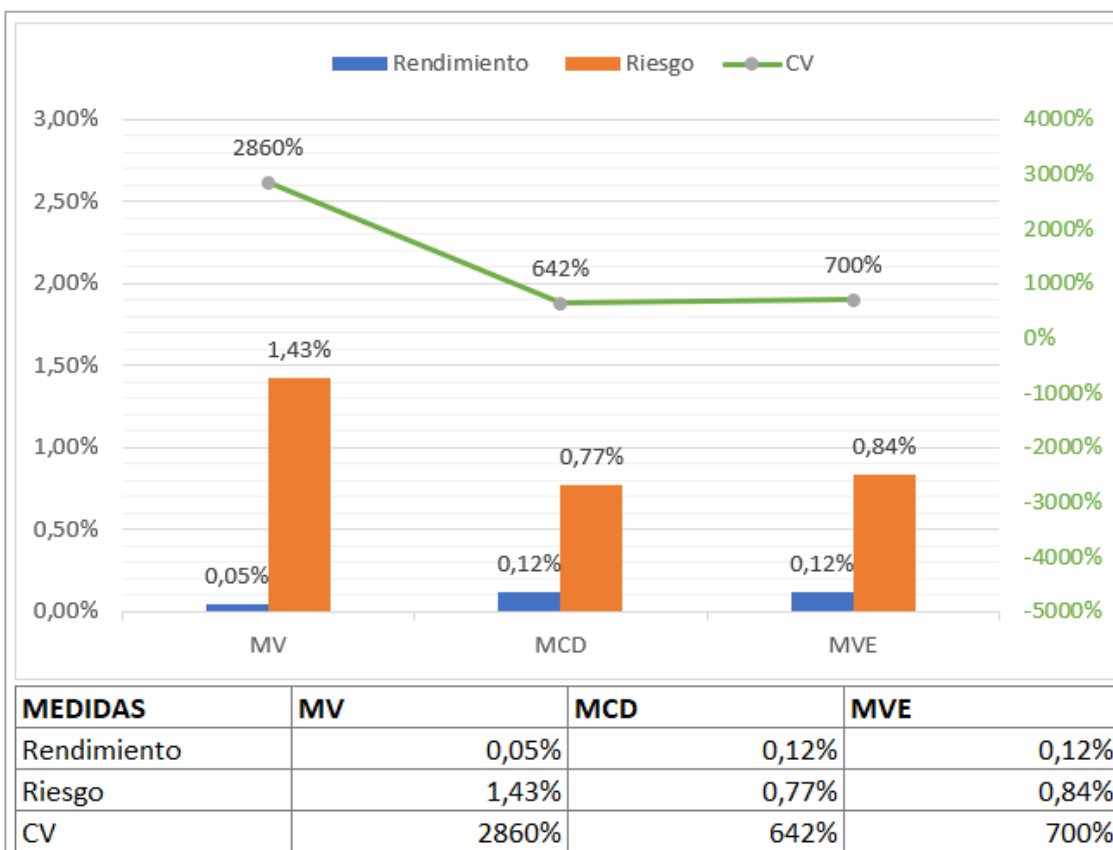
- Mu (rendimiento esperado): 0.0012, o 0.12%, indica el rendimiento promedio diario esperado del portafolio.
- Sigma (Riesgo): 0.0084, o 0.84%, mide la volatilidad del portafolio y, por ende, el riesgo.
- Cvar (Valor en Riesgo Condicional): 0.0571, o 5.71%, estima la pérdida esperada en el peor escenario del 5% de los casos.
- VaR (Valor en Riesgo): 0.0297, o 2.97%, representa la máxima pérdida esperada con una confianza del 95% para el periodo determinado.

3.2 Comparación de los métodos de optimización de portafolios.

En el contexto de las inversiones, el Coeficiente de Variación CV puede ser interpretado como el riesgo por unidad de retorno, y un CV menor indicaría una mayor consistencia en el sentido de que se obtiene más retorno por cada unidad de riesgo asumido. Basados en los resultados del CV, el portafolio optimizado por el método MCD es el más consistente, seguido muy de cerca por el portafolio MVE, mientras que el portafolio MV es el menos consistente de los tres. Por lo tanto, cuando se dice que un portafolio es más consistente en este contexto, se está indicando que dicho portafolio ofrece retornos más estables o predecibles por cada unidad de riesgo asumido en comparación con otros portafolios, es decir, hay una mejor relación riesgo – rendimiento. El portafolio optimizado por el método MCD, siendo el más consistente, sugiere que ofrece un equilibrio más favorable entre el riesgo y el retorno, en comparación con los otros portafolios mencionados (MVE y MV).

Figura 26.

Comparación de los CV por cada método



Nota. La figura proporciona una comparación visual y tabular de las tres estrategias de optimización de portafolios. En el eje primario de las x se destacan sus respectivos rendimientos y riesgos, en el eje secundario de las y (en verde) se destaca el CV. Las barras naranjas muestran los niveles de riesgo, las azules de rendimiento, mientras que la línea verde señala los niveles de CV.

El portafolio MV tiene el CV más alto (2.860%), lo que indica que proporciona menos retorno por unidad de riesgo y por lo tanto es menos eficiente en términos de la consistencia del rendimiento relativo al riesgo asumido.

El portafolio MCD tiene el menor CV (642%), lo que sugiere que es el más eficiente de los tres en términos de ofrecer más retorno por unidad de riesgo.

El portafolio MVE tiene un CV (700%), ligeramente más alto que el MCD, lo que indica una eficiencia ligeramente menor que el MCD, pero sigue siendo más eficiente que el MV.

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

4.1 Discusión

La literatura académica refleja una evolución de la teoría de portafolios que transita desde sus cimientos hasta prácticas de optimización avanzadas. Mientras que el modelo de Markowitz proporcionó las bases para entender la diversificación y la relación entre riesgo y retorno, sus limitaciones han motivado la exploración de metodologías más robustas. Estos enfoques emergen como herramientas clave para atenuar el efecto de datos atípicos y reforzar la fiabilidad en las estimaciones de riesgo. Particularmente en el mercado financiero colombiano, la adopción de estos métodos estadísticos robustos en el modelamiento interno podría aumentar la efectividad en la gestión de inversiones y también asegurar su congruencia con el entorno regulatorio y las tendencias del mercado en Colombia.

En este estudio se ha evidenciado el impacto significativo que los datos atípicos de los retornos diarios del precio de las acciones ejercen sobre los estimadores estadísticos utilizados en la construcción de portafolios mediante el método de media-varianza, lo que ha llevado a cuestionar la presunción de normalidad multivariante sobre la que se asienta la teoría tradicional de selección de portafolios. Los resultados subrayan la necesidad de aplicar métodos de estimación robusta, demostrando que son una opción viable y efectiva para la formación de portafolios, especialmente en escenarios donde el retorno de los activos muestra valores anómalos. La adopción de estos métodos robustos facilita la creación de modelos de análisis más confiables y ofrecen soporte en la toma de decisiones de inversión, conduciendo a la estructuración de carteras más estables y resilientes.

La evaluación comparativa de los métodos de optimización de portafolios MV, MCD y MVE revela diferencias en términos de rendimiento y gestión de riesgos. El método MCD se distingue como el más eficiente, ofreciendo la mejor combinación de rendimiento y control de riesgo, como lo demuestra su coeficiente de variación más bajo (642%). Esto

indica que, por cada unidad de riesgo asumido, MCD proporciona una mayor rentabilidad en comparación con MV y MVE. Aunque MVE presenta una eficiencia ligeramente menor que MCD, con un CV de 700%, supera significativamente al método MV, que registra un CV de 2860% y, por ende, la menor eficiencia entre los tres enfoques evaluados. Por lo tanto, en términos de rendimientos ajustados al riesgo, los resultados sugieren que la metodología MCD es superior para la optimización de portafolios, seguida de cerca por MVE, mientras que MV resulta ser la opción menos favorable en el contexto de este estudio.

4.2 Conclusión

Esta investigación se centró en evaluar la efectividad de dos métodos estadísticos de estimación robusta en la optimización de un portafolio de activos de renta variable en el mercado bursátil colombiano. Los resultados obtenidos indican que ambos métodos proporcionaron un rendimiento superior en comparación con el enfoque tradicional. Se observó una mejora notable en la diversificación y el equilibrio del riesgo en los portafolios configurados, lo que se tradujo en una mayor estabilidad y rentabilidad contemplando el periodo de estudio. Estos métodos robustos demuestran ser herramientas valiosas para la optimización de portafolios en entornos de mercado volátiles, como es el caso del mercado bursátil colombiano.

En el marco de este estudio, se emprendió una evaluación y una selección metódica de dos técnicas estadísticas de estimación robusta, fundamentadas en una extensa revisión de la literatura académica relevante. Este proceso no solo implicó un análisis detallado de las metodologías existentes, sino también una consideración crítica de su aplicabilidad y eficacia en el contexto específico del mercado bursátil colombiano. Se determinó que el MCD y el MVE se distinguieron por su capacidad para manejar adecuadamente las peculiaridades y desafíos del mercado colombiano, como la volatilidad y las variaciones en los patrones de inversión. Su aplicación condujo a una mejor comprensión de los riesgos y a una gestión más eficiente del capital invertido, evidenciando una mejora significativa en la diversificación y el rendimiento ajustado al

riesgo de los portafolios. Además, la selección de estas técnicas se vio respaldada por su consonancia con los hallazgos y recomendaciones de la literatura académica, lo que subraya la importancia de una base teórica sólida en la aplicación práctica de estrategias de inversión. Esta sinergia entre teoría y práctica no solo valida la elección de las técnicas en cuestión, sino que también contribuye al cuerpo de conocimiento en el campo de la gestión de inversiones y la economía financiera

Los métodos estadísticos robustos aplicados lograron un rendimiento promedio del 0,12%, destacando su eficacia al proporcionar mayores retornos. En contraste, el Método MV mostró un rendimiento más modesto de solo 0,05%. Esta diferencia no solo refleja una ventaja en términos de ganancias potenciales, sino que también es indicativa de una gestión de riesgo más efectiva por parte de los métodos MCD y MVE. El coeficiente de variación más bajo del MCD (642%) y del MVE (700%) en comparación con el MV (2860%) subraya su capacidad para generar mayores retornos por unidad de riesgo asumido.

Los resultados subrayan la importancia de adoptar enfoques estadísticos avanzados y especializados para la evaluación de riesgos y la optimización de portafolios. Estas técnicas, al ser aplicadas en el contexto colombiano, han demostrado su valor en la mejora de la eficiencia de los portafolios, optimizando la relación riesgo – rendimiento y ofreciendo una mayor resistencia ante los desafíos del mercado. La investigación resalta la necesidad de una comprensión profunda del mercado bursátil colombiano, con sus características únicas y desafíos específicos. Las entidades financieras autorizadas por la SFC para gestionar portafolios de inversión deben estar equipados no solo con herramientas estadísticas robustas, sino también con un conocimiento profundo del contexto en el que están invirtiendo. Esto implica un enfoque más holístico que considera factores económicos, políticos y sociales que pueden influir en el mercado. Por último, las recomendaciones surgidas de este estudio enfatizan la adaptabilidad y la actualización constante de estrategias de inversión. El mercado bursátil colombiano, como muchos mercados emergentes, está sujeto a rápidas transformaciones y a una volatilidad inherente. Por lo tanto, las estrategias de inversión deben ser suficientemente

flexibles para adaptarse a estos cambios, asegurando así que los portafolios permanezcan óptimos y relevantes con el tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

- Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia AMV. (2019). *Guía de estudio administración de portafolios* (3.^a ed., Vol. 8, pp. 1-86). <https://www.amvcolombia.org.co/wp-content/uploads/2019/08/Gu%C3%ADa-Administraci%C3%B3n-de-Portafolios.pdf>
- Autorregulador del Mercado de Valores de Colombia AMV. (2022). *Guía de estudio regulación* (3.^a ed.). <https://www.amvcolombia.org.co/wp-content/uploads/2022/04/Guia-Regulacion-Operador-V.-240422.pdf>
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. (2004). *Principios de Inversiones* (I. de E. McGraw-Hill, Ed.; Quinta). Mc Graw Hill. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=496231>
- Cuartas, F. (2012). *La Bolsa de Valores de Colombia, espacio temporal y la World Federation of Exchanges-WFE* *. www.gacetafinanciera.com/educating
- De Lara Haro, A. (2003). *Medición y control de riesgos financieros* (Noriega Editores, Ed.; 3.^a ed.). Limusa. https://www.academia.edu/23346886/Medicion_y_Control_de_Riesgos_Financieros_Alfonso_de_Lara_Haro
- Delgado Vélez, L. D., & Durango Gutiérrez, M. P. (2018). Estructuración de un portafolio de inversiones con acciones colombianas. *Semestre Económico*, 21(46), 167-183. <https://doi.org/10.22395/seec.v21n46a7>
- Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Vol. 6). <http://www.mhhe.com/he/hmi6e>
- Gallardo, E. E. (2017). *Metodología de la Investigación. Manual autoformativo interactivo* (1.^a ed.). Universidad Continental. <http://www.continental.edu.pe/>
- Kobayashi, K., Takano, Y., & Nakata, K. (2021). Cardinality-constrained Distributionally Robust Portfolio Optimization. En *European Journal of Operational Research* (Vol. 309, Número 3). <http://arxiv.org/abs/2112.12454>

- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
https://www.math.hkust.edu.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf
- Mayellis, Á., & Hidalgo, M. (2015). *Optimal investment portfolio conformation through robust estimation methods, a comparative survey*.
<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54539>
- Rasmussen, M. (2003). *QUANTITATIVE PORTFOLIO OPTIMISATION, ASSET ALLOCATION AND RISK MANAGEMENT* (Aardvark Editorial, Ed.; first). Palgrave MacMillan.
[https://openlibrary.org/books/OL8398978M/Quantitative_Portfolio_Optimisation_Asset_Allocation_and_Risk_Management_\(Finance_and_Capital_Market\)](https://openlibrary.org/books/OL8398978M/Quantitative_Portfolio_Optimisation_Asset_Allocation_and_Risk_Management_(Finance_and_Capital_Market))
- Rojas Arias, J. (2016). SISTEMA FINANCIERO: UN ANÁLISIS DEL MERCADO DESDE LA PERSPECTIVA DEL DERECHO ECONÓMICO. *Revista de Derecho Privado*, 56, 1-21. <https://doi.org/10.15425/redepriv.56.2016.02>
- Ronchetti Elvezio. (2021). The main contributions of robust statistics to statistical science and a new challenge. *Ronchetti, Elvezio*, 79, 127-135.
<https://doi.org/10.1007/s40300-020-00185-3>
- Tovar & Asociados. (2023). Temario de Directivo 2023. En *Guía de preparación para la certificación de Directivo AMV*. www.tovarasociados.com
- Uribe Escobar, J. (2013, enero 30). El sistema financiero colombiano: estructura y evolución reciente. *Revista del Banco de la República*, 5-18.
https://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/archivos/rbr_nota_1023.pdf
- Useche Arévalo, A. (2015). Construcción de portafolios de inversión desde las finanzas del comportamiento. *Cuadernos de Administración*, 28, 11-43.
<https://www.redalyc.org/pdf/205/20543851001.pdf>
- Würtz, D., Setz, T., Chalabi, Y., Chen, W., & Ellis, A. (2015). *Portfolio Optimization with R/Rmetrics* (D. Würtz & Hanf Martin, Eds.; 2.^a ed.). Finance online GmbH.
<https://www.rmetrics.org/downloads/9783906041018-fPortfolio.pdf>

Würtz, D., Setz, T., Chalabi, Y., & Lam, L. (2015). *Basic R for Finance* (2.^a ed., Vol. 1). Finance Online GmbH Swiss Information Technologies.

Zhang, Y., Li, X., & Guo, S. (2018). Portfolio selection problems with Markowitz's mean–variance framework: a review of literature. *CrossMark*, 17(2), 125-158. <https://doi.org/10.1007/s10700-017-9266-z>